This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

97
23

Physics
Presented to the
UNIVERSITY LIBRARIES
by Mrs. Ida Schlapp

Class QC3
Book H45
v.1
Acc.

13.50
6.75
20.25

Digitized by Google

UNIVERSITY OF IOWA
3 1858 021 879 394

Date Due

3-31-65			
DEC 14 1973			
NOV 21 1984			

CAT. NO. 23 233 PRINTED IN U.S.A.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

NACH EINER PHOTOGRAPHIE VON ROB. KREWALDT IN BONN.

Digitized by Google

Digitized by Google

GESAMMELTE WERKE

VON

HEINRICH HERTZ.

BAND I

SCHRIFTEN VERMISCHTEN INHALTS

LEIPZIG, 1895
JOHANN AMBROSIUS BARTH
(ARTHUR MEINER)

Digitized by Google

SCHRIFTEN VERMISCHTEN INHALTS

VON

HEINRICH HERTZ.

HERAUSGEGEBEN

VON

PH. LENARD.

MIT FIGUREN IM TEXTE, EINER TAFEL UND EINEM PORTRÄT.

LEIPZIG, 1895
JOHANN AMBROSIUS BARTH
(ARTHUR MEINER)

Digitized by Google

Übersetzungsrecht vorbehalten.

Druck von Metzger & Wittig, Leipzig.

Digitized by Google

Physics
QC3
.45
V.1

Vorwort.

Den Inhalt des vorliegenden Bandes bilden zum gröfsten Teile die früheren, vor den grofsen elektrischen Untersuchungen entstandenen Arbeiten von Heinrich Hertz. Zerstreut in verschiedenen Zeitschriften waren dieselben bisher zum Teil nur schwer, oder, wie die Dissertation, fast gar nicht zugänglich gewesen. Aus der späteren Zeit wurden noch hinzugefügt die Heidelberger Rede, welche gesondert schon im Verlage von Emil Strauss in Bonn erschienen war und auch fernerhin erscheinen wird, deren Aufnahme jedoch in sehr dankenswerter Weise von dieser Verlagsbuchhandlung gestattet wurde, ferner die letzte Experimentaluntersuchung und endlich, den Schlufs des Bandes bildend, noch ein Zeichen von Hertz' dankbarer Verehrung für seinen nun auch schon dahingegangenen grofsen Meister.

Die Reihenfolge der einzelnen Stücke ist im wesentlichen die ihrer Veröffentlichung. In der vorangestellten Einleitung durfte ich mit gütiger Erlaubnis des Herrn Senator Dr. Gustav Hertz einiges aus den Briefen von Hertz an seine Eltern mitteilen, was geeignet schien, einen Einblick zu geben in den Verlauf seiner wissenschaftlichen Ausbildung und in die Entstehungsgeschichte der Arbeiten dieses Bandes.

601108

Digitized by Google

Dieser Band als erster, die „Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft“ als zweiter und die „Prinzipien der Mechanik“ als dritter Band können nunmehr als die gesamten Werke von HEINRICH HERTZ enthaltend angesehen werden.

Februar 1895.

Der Herausgeber.

Digitized by Google

Inhalt.

		Seite
	Einleitung	IX
1.	Versuche zur Feststellung einer oberen Grenze für die kinetische Energie der elektrischen Strömung. 1880	1
2.	Über die Induktion in rotierenden Kugeln. 1880	37
3.	Über die Verteilung der Elektricität auf der Oberfläche bewegter Leiter. 1881	135
4.	Obere Grenze für die kinetische Energie der bewegten Elektricität. 1881	145
5.	Über die Berührung fester elastischer Körper. 1881	155
6.	Über die Berührung fester elastischer Körper und über die Härte. 1882	174
7.	Über ein neues Hygrometer. 1882	197
8.	Über die Verdunstung der Flüssigkeiten, insbesondere des Quecksilbers, im luftleeren Raume. 1882	199
9.	Über den Druck des gesättigten Quecksilberdampfes. 1882	215
10.	Über die kontinuierlichen Ströme, welche die fluterregende Wirkung der Gestirne im Meere veranlassen muſs. 1883	223
11.	Dynamometrische Vorrichtung von geringem Widerstande und verschwindender Selbstinduktion. 1883	227
12.	Über eine die elektrische Entladung begleitende Erscheinung. 1883	233
13.	Versuche über die Glimmentladung. 1883	242
14.	Über das Verhalten des Benzins als Isolator und als Rückstandsbildner. 1883	277
15.	Über die Verteilung der Druckkräfte in einem elastischen Kreiscylinder. 1883	283
16.	Über das Gleichgewicht schwimmender elastischer Platten. 1884	288

Digitized by Google

Seite

17. Über die Beziehungen zwischen den MAXWELL'schen elektrodynamischen Grundgleichungen und den Grundgleichungen der gegnerischen Elektrodynamik. 1884 295
18. Über die Dimensionen des magnetischen Poles in verschiedenen Maßsystemen. 1884 315
19. Graphische Methode zur Bestimmung der adiabatischen Zustandsänderungen feuchter Luft. 1884 320
20. Über die Beziehungen zwischen Licht und Elektricität. 1889 339
21. Über den Durchgang der Kathodenstrahlen durch dünne Metallschichten. 1891 355
22. Zum 31. August 1891 360

Digitized by Google

Einleitung.

Im Oktober des Jahres 1877 war Heinrich Hertz, damals 20 Jahre alt, nach München gezogen, in der Absicht, dort weiter das Ingenieurfach zu studieren, welches er zu seinem Berufe erwählt hatte. Er war kein Anfänger mehr in demselben; denn er hatte das übliche Lehrjahr praktischer Arbeit schon absolviert und auch die allgemeinen, mathematischen und naturwissenschaftlichen Vorstudien schon eingehend betrieben. Jetzt sollte ihn sein Weg auf das eigentliche Arbeitsfeld und zu den besonderen Gebieten seines Faches leiten, zu den technischen Einzelheiten. Da begann er es zu fühlen, wie der gewählte Beruf ihn doch nicht befriedigen könne, wie ganz anders ihn die jetzt bevorstehende Arbeit anmute, als das, was er bisher betrieben, wie ihm die Arbeit des Lebens eine Bürde zu werden drohe, statt ihm die Befriedigung zu bringen, welche er bisher im Studium der Naturwissenschaften gefunden hatte. Er stand am Scheidewege. Da vertraute er sich seinen Eltern an mit den folgenden Worten:

„(München, 1. Nov. 1877.) Liebe Eltern! — Ihr wundert Euch vielleicht, dafs dieser Brief dem vorigen so schnell folgt, und ich dachte auch nicht, so bald schon wieder zu schreiben, aber es ist diesmal in einer wichtigen Sache und die keinen langen Aufschub verträgt.

Es ist eigentlich ein beschämendes Geständnis für mich, aber es mufs doch heraus; ich möchte noch jetzt im letzten Augenblick umsatteln und Naturwissenschaften studieren. Ich

Digitized by Google

komme in diesem Semester an den Scheideweg, wo ich mich ihnen entweder ganz widmen muſs, oder definitiv von ihnen Abschied nehmen und jeder überflüssigen Beschäftigung mit ihnen entsagen muſs, wenn ich nicht meine eigentlichen Studien darüber liegen lassen und ein mittelmäſsiger Ingenieur werden wollte. Da ich dies neulich bei der Bearbeitung meines Studienplanes einsah, und so einsah, daſs mir darüber kein Zweifel bleiben konnte, da wollte ich zuerst jede überflüssige Beschäftigung mit Mathematik und Naturwissenschaften abschwören; aber da wurde es mir mit einem Male klar, daſs ich dies doch nicht könnte, daſs ich auch bisher eigentlich nur mit diesen mich beschäftigt habe und jetzt auch auf diese nur mich gefreut, alles andere kam mir schal vor, und die Erkenntnis kam so plötzlich, daſs ich am liebsten gleich aufgesprungen wäre und Euch geschrieben hätte; aber ich hielt mich doch noch ein paar Tage hin und überlegte die Sache hin und her, aber ich komme zu keinem anderen Resultate. Ich begreife auch nicht, daſs ich mir nicht früher darüber klar geworden bin, da ich doch auch hierher mit der besten Absicht kam, Mathematik und naturwissenschaftliche Gegenstände zu hören, an Situationszeichnen, Baukonstruktion, Baumaterialien etc. aber gar nicht gedacht hatte, die doch meine Hauptbeschäftigung sein sollten. Ich habe mir auch das vorgehalten, was ich füher mir öfters gesagt habe, daſs ich lieber ein bedeutender Naturforscher, als ein bedeutender Ingenieur, aber lieber ein unbedeutender Ingenieur, als ein unbedeutender Naturforscher sein möchte; jetzt, wo ich an der Grenze stehe, denke ich aber, daſs doch auch wahr ist, was Schiller sagt: »Und setzet Ihr nicht das Leben ein, nie wird Euch das Leben gewonnen sein«, und daſs allzuviel Vorsicht Thorheit wäre. Ich verhehle mir auch nicht, daſs Ingenieur zu werden wohl zunächst ein sichereres Brod wäre, und der Gedanke thut mir leid, daſs ich doch auf diesem Wege viel länger Deine Hilfe, lieber Papa, in Anspruch nehmen müſste, wie auf dem anderen, aller Voraussicht nach; aber alledem steht das Eine gegenüber, daſs ich fühle, wie ich mich den Naturwissenschaften doch ganz und mit Begeisterung widmen könnte und mir auch mit ihnen genug geschähe, während ich doch jetzt einsehe, daſs das, was man Ingenieurwissenschaften nennt, mir nicht genügt und ich

Digitized by Google

daher immer nach anderer Beschäftigung suche. Ich hoffe, dafs ich mich hierin nicht täusche, denn es wäre eine grofse und verderbliche Selbsttäuschung; aber das weifs ich gewifs, dafs ich mich bei den Naturwissenschaften nicht zurücksehnen würde nach den Ingenieurwissenschaften, dafs ich aber, wenn ich Ingenieur werde, mich immer nach der Naturwissenschaft sehnen werde, und es scheint mir unerträglich, dafs sie mir nur dienen soll, um ein Examen zu machen. Wenn ich zurückdenke, so finde ich auch, dafs ich zehnmal mehr Aufmunterung hatte, Naturwissenschaft zu studieren, als Ingenieur zu werden, und ob schliefslich ich als solcher durch meine vielleicht etwas gröfsere mathematische Bildung einen Vorzug vor Anderen hätte, ist mir auch zweifelhaft; es scheint mir, als ob schliefslich doch viel mehr auf praktischen Sinn, Erfahrung und Kenntnis von Daten und Formeln, die mich, weil zufällig, nicht interessieren, ankommt, wenigstens für die ersten zehn Jahre der Praxis. Dies alles und vieles andere habe ich weidlich überlegt und werde es auch weiter überlegen, bis ich Antwort von Euch erhalte, und alles in allem komme ich zu dem Resultate, dafs es wohl manchen praktischen und handgreiflichen Nutzen hätte, Ingenieur zu werden, aber dafs damit doch eine Art Selbstverleugnung und Entsagung verbunden wäre, zu der ich mich nicht zwingen sollte, wenn nicht äufsere Gründe mich zwingen. Und so bitte ich Dich, lieber Papa, nicht sowohl um Deinen Rat, als um Deine Entscheidung, denn Rat brauche ich nicht mehr und es ist auch nicht mehr Zeit, lange zu beraten; aber wenn Du mir sagst, ich solle Naturwissenschaft studieren, so werde ich dies als ein grofses Geschenk von Dir annehmen, und was dann Fleifs und Liebe zur Sache thun können, das werden sie thun; und ich glaube auch, Du wirst diese Entscheidung geben, denn einmal hast Du mir noch nie einen Stein in den Weg legen wollen, und zweitens schienst Du es selber manchmal lieber zu sehen, wenn ich Naturwissenschaft studierte; wenn Du aber es für mein Bestes hältst, wenn ich den einmal betretenen Weg verfolge (was ich jetzt nicht mehr glaube), so werde ich auch dies thun, und zwar ganz und voll, denn ich bin das Zweifeln und Zaudern jetzt satt, und wenn ich so fortfahre wie bisher, so bleibe ich ewig auf dem alten Flecke.... Also warte ich auf baldige Antwort

Digitized by Google

und werde bis dahin mir selbst noch weiter überlegen. Einstweilen lebt wohl und grüfst Alle von Eurem treuen Sohne Heinrich."

Die Entscheidung fiel aus wie sie erwartet wurde, und voll des Glückes, seine Wünsche ins Werk setzen zu können, ordnete nun HERTZ seinen Studienplan. Er verblieb im Ganzen ein Jahr lang in München. Das Wintersemester 1877/78 widmete er in aller Zurückgezogenheit dem Studium der Mathematik und Mechanik, wobei er meist Originalwerke benützte, wie die von LAPLACE, LAGRANGE. Im darauffolgenden Sommersemester dagegen verlegte er sich hauptsächlich auf die praktischen Übungen im physikalischen Laboratorium. Es boten ihm hierin die Anfängerkurse an der Universität und gleichzeitig auch die an der technischen Hochschule, in den von v. JOLLY und v. BEZOLD geleiteten Instituten, Gelegenheit zur Ergänzung dessen, was ihn seine selbstverfertigten Apparate schon früh gelehrt hatten.

So vorbereitet, zog HERTZ im Oktober 1878 nach Berlin, begierig, v. HELMHOLTZ' und KIRCHHOFF's Schüler zu werden. Als er, daselbst angelangt, die Anschläge des schwarzen Brettes der Universität musterte, fiel sein Blick auch auf die Ankündigung einer Preisfrage der philosophischen Fakultät, eben aus dem Gebiete der Physik. Es war die Frage nach der Trägheit bewegter Elektricität. Sie schien ihm nicht so unüberwindlich schwierig, als sie manchem seines Alters geschienen haben mochte, und er beschlofs, sich an deren Bearbeitung zu versuchen.

Wir sind hiermit am Beginne der ersten selbständigen Arbeit von HERTZ angelangt (Nr. 1 dieses Bandes). Nicht ohne Verwunderung werden wir nun aus seinen eigenen Berichten an seine Eltern vernehmen, wie diese Arbeit, welche man für das Werk eines langerfahrenen Forschers nehmen möchte, unter den Händen des einundzwanzigjährigen Studenten entstand.

„(Berlin, 31. Okt. 1878.) Mein Kolleg hat seit Montag begonnen, nämlich das bei KIRCHHOFF, ein anderes fängt erst am Mittwoch an. Aufserdem habe ich jetzt doch das Praktikum belegt; eine der Preisaufgaben für dies Jahr fällt nämlich mehr oder weniger in mein Fach und ich werde versuchen, sie zu bearbeiten. Es war dies anfangs nicht meine Absicht,

Digitized by Google

weil ein Kolleg über Mineralogie, welches ich hören wollte, damit kollidierte, ich habe mich dann aber entschlossen, dieses auf das nächste Semester zu lassen. Ich habe schon mit Professor HELMHOLTZ darüber gesprochen, er war so freundlich, mir über die Litteratur einige Auskunft zu geben.“ Schon eine Woche später finden wir ihn bei den Versuchen: „(6. Nov. 1878.) Seit gestern bin ich im Laboratorium beschäftigt. Die Preisaufgabe lautet dem Sinne nach: wenn sich die Elektricität in den Körpern mit träger Masse bewegte, so würde sich das in der Grösse des Extracurrents (der Ströme, welche beim Öffnen und Schliefsen eines Stromes nebenbei entstehen) unter gewissen Umständen zeigen. Es sollen solche Versuche über die Gröfse der Extracurrents angestellt werden, aus welchen ein Schlufs auf die bewegte träge Masse gezogen werden kann. Der Termin ist bis zum 4. Mai, gegeben ist sie allerdings schon am 3. August, es thut mir leid, dafs ich nicht früher darum wufste. Ich mufs auch noch bemerken, dafs ich einstweilen nur versuche, sie zu bearbeiten, dies aber möglicher Weise nicht in befriedigender Weise mir gelingt, so dafs ich über die Arbeit als Preisarbeit nicht gern gesprochen haben möchte, ich hätte darüber gar nicht geschrieben, wenn es nicht zur Erklärung nötig gewesen wäre. Es ist mir sehr angenehm, überhaupt mich an einer derartigen Arbeit versuchen zu können. Gestern also meldete ich mich bei Professor HELMHOLTZ, dafs ich mir die Sache soweit überlegt habe und gerne anfangen möchte. Er ging dann mit mir zum Assistenten und war so freundlich, sich noch 20 Minuten lang mit mir darüber zu unterhalten, wie ich es am besten anfienge und was ich für Instrumente brauche. Gestern und heute habe ich dann angefangen meine Sachen aufzubauen. Ich habe für mich ganz allein ein kleines Stübchen, so grofs wie das Morgenzimmer,[1]) nur $1^1/_2$ bis 2 mal so hoch, ich kann infolge dessen gehen und kommen wann ich Lust habe, daran könnt Ihr schon sehen, dafs ziemlich viel Platz vorhanden ist. Aber auch alles übrige ist wunderschön eingerichtet. . . . . Hoffentlich werden die Resultate, die ich erhalte, dem Gebäude entsprechend sein, bequemer kann es mir jetzt nicht leicht

[1] Ein grofses Zimmer im Hause seiner Eltern.

Digitized by Google

werden. Einstweilen bin ich natürlich mit vorbereitenden Arbeiten beschäftigt, aber es macht mir das gröfste Vergnügen schon jetzt, diese vielen Hilfsmittel zu benutzen. Mein Galvanometer, das zu Haus auf der Drehbank[1]) den sichersten Platz hatte, steht auf einem eisernen Konsol, das in die Wand eingelassen ist, das Fernrohr ist durch Schrauben in allen Richtungen verstellbar, es ist das gewissermafsen bequemer, als wenn man es auf Bücher legt. . . . . Ich höre also jetzt jeden Morgen ein interessantes Kolleg, gehe dann ins Laboratorium, wo ich mit einer kurzen Pause bis 4 Uhr bleibe, nachher werde ich dann zu Haus oder auf dem Lesezimmer arbeiten, bisher hatte ich noch immer damit zu thun, das Material über die Extracurrents herbeizusuchen. (Es giebt auch eine Arbeit, von der ich allerdings bisher nur einen Auszug gesehen habe, worin ein Mann nachweist, dafs ein solcher Strom gar nicht existiere, hoffentlich hat der Mann sehr Unrecht)." „(17. Nov. 1878). Meine Arbeit rückt langsam aber hoffentlich sicher weiter. Ich habe zunächst die Erfahrung gemacht, dafs ein Konsol in der Dorotheenstrafse viel beweglicher ist als ein einfacher Tisch in der Magdalenenstrafse; auf meine Bitte bin ich dann in ein anderes Zimmer gekommen, wo ich einen gemauerten Steinpfeiler habe. . . . Helmholtz kommt jeden Tag einige Minuten, sieht sich die Sache an und ist sehr liebenswürdig. Die Arbeit, die ich mache, ist gerade nicht sonderlich dankbar, da das mutmafsliche Resultat ein negatives ist, d. h. gewisse Erscheinungen werden nicht eintreten, was im ganzen weniger Vergnügen als das Eintreten bereitet, indessen liegt das in der Natur der Sache." „(24. Nov. 1878.) Ich bin in der That jetzt sehr zufrieden und wünsche es mir nicht besser als ich es habe. Ein grofser Teil des Tages ist der Arbeit im Laboratorium gewidmet, und leider sind die Tage so kurz, dafs, wenn ein grofser Teil abgeht, fast nichts mehr übrig bleibt. Ein grofser Teil dieses grofsen Teils geht natürlich wieder auf sehr unnütze, wenigstens sehr wenig lehrreiche Arbeiten, als Korkschnitzen, Drähte zufeilen etc., und die Beobachtungen an sich sind natürlich auch nicht sehr angenehm. Es kann deshalb auch etwas

[1] Welche er seit seinem 16. Jahre besafs und gern benutzte.

Digitized by Google

zweifelhaft sein, ob es ganz richtig ist, so viel Zeit an diese Dinge zu wenden, so lange meine Kenntnisse noch so lückenhaft sind, wie sie sind. Aber trotzdem möchte ich diese Beschäftigung nicht missen; ich kann nicht sagen, eine wie viel höhere Befriedigung es mir gewährt, so aus der Natur selbst für mich und Andere Belehrung zu holen, als immer nur von Anderen und für mich ganz allein zu lernen. Solange ich nur aus Büchern arbeite, verläfst mich das Gefühl nicht, dafs ich ein gänzlich überflüssiges Glied der Gesellschaft sei. Es ist auch etwas sonderbar, dafs ich jetzt mit einem ziemlich speziellen Gegenstand der Elektricitätslehre beschäftigt bin, während ich vor einem guten halben Jahre davon kaum mehr wufste, als was ich seit Dr. LANGE's[1]) Zeiten noch nicht wieder vergessen hatte. Hoffentlich wird das meiner Arbeit nicht schaden. Augenblicklich sind ihre Aspecten gut. Die Schwierigkeiten, welche mir HELMHOLTZ im Anfang als die hauptsächlichsten nannte, habe ich schon hinter mir, und wenn alles gut, bin ich in 14 Tagen schon mit einer notdürftigen Lösung fertig und werde Zeit haben, dieselbe hübsch weiter auszuarbeiten." Er bittet dann seine Eltern, ihm die Tangentenbussole zu senden, welche er in den Ferien zuvor sich zu Hause gemacht hatte, ohne wohl damals zu ahnen, dass er sie so bald in dieser Weise würde benutzen können[2]).

Weniger erfreut über den Fortgang der Arbeit schreibt er acht Tage später: „Wenn eine Schwierigkeit besiegt ist, tritt gleich eine gröfsere dafür ein." Es waren dies wohl die auf S. 6 erwähnten Schwierigkeiten, denn sie veranlafsten ihn, in den nun folgenden Weihnachtsferien zu Hause in Hamburg sich den Kommutator (Fig. 1, S. 13) zu bauen, von welchem er nachher berichtet: „(12. Jan. 1879.) Der kleine Apparat, den ich gemacht habe, thut mir sehr gute Dienste, bessere selbst, als ich erwartet hatte, so dafs ich in den letzten drei Tagen

---

[1]) Der Vorsteher der Bürgerschule, die er bis zu seinem 16. Jahre besuchte.

[2]) Es ist die im Texte auf S. 12 unter 3 erwähnte Bussole, eine einfache Holzscheibe, auf der Drehbank abgedreht, umwunden mit dem kupfernen Drahte und in der Mitte mit einem Ausschnitte für den Magneten versehen; sie ist wohlbehalten noch vorhanden.

Digitized by Google

alle Messungen noch einmal und genauer als vorher durchmachen konnte.“ Schon drei Monate, nachdem er zum ersten Male an diese Arbeit gedacht, berichtet er über den Abschluſs des ersten Teiles der Versuche: „(21. Jan. 1879.) Sehr groſse Freude hatte ich, als zuerst die Theorie und die Beobachtung zusammenstimmten, umsomehr, als dies besser und unerwarteter geschah, als ich vermutet hatte. Ich erhielt zunächst nämlich aus meinen Rechnungen einen Wert, der viel gröſser war als der beobachtete, da bemerkte ich zufällig, daſs er fast doppelt so groſs war, und als ich nach langem Suchen in den Rechnungen eine vergessene 2 ans Licht brachte, stimmte alles so gut, als ich nur irgend erwarten konnte. Jetzt habe ich mich zu genaueren Beobachtungen gemacht, die allerdings, wie es meistens geht, mir das erste Mal fehlgeschlagen sind, ich hoffe sie aber doch noch rechtzeitig in Ordnung zu bringen. Der Apparat, den ich zu Haus gemacht habe, arbeitet in der That sehr gut, so daſs ich nach der Seite einen besseren nicht brauchte, ja daſs mir ein in der ersten Fabrik aus Gold und Elfenbein gearbeiteter nicht mehr nützen würde. (Ich schreibe das, um Mama womöglich noch einen vergnügten Tag zu machen, erfahre ich, daſs mir dies gelungen, so werde ich es nochmals wiederholen.)“ Zehn Tage später waren auch die Versuche mit den geradlinigen Drähten vollendet: „(31. Jan. 1879.) Mit meiner Arbeit bin ich jetzt eigentlich ganz fertig, viel schneller als ich gedacht hatte. Das kommt daher besonders, daſs ich auch aus den genaueren Versuchen ein zwar sehr gut stimmendes, aber negatives Resultat erhalten habe, d. h. so weit ich die Genauigkeit treiben kann, zeigt sich die bisherige Theorie vollkommen bestätigt. Ich hätte natürlich lieber etwas Positives gefördert; da dies nun aber in der Natur nicht vorgesehen scheint, so muſs ich mich so begnügen. Mit der bisherigen Theorie aber stimmen die Versuche so gut, wie ich nur wünschen kann, und da ich nicht glaube, mit den mir jetzt zu Gebote stehenden Mitteln weiter gehen zu können, so habe ich die Arbeit aufgegeben, und hoffe, daſs auch die Kommission befriedigt sein wird; nach meiner Ansicht würden weitere Versuche doch nur zu demselben Resultate führen. Die Ausarbeitung werde ich in den nächsten Tagen beginnen, diese Woche habe ich mir die Arbeit etwas aus dem Kopfe ge-

Digitized by Google

schlagen." Die Ausarbeitung geschah dann während einer militärischen Übung zu Freiburg.

Es kann auffallen, dafs in diesen fortlaufenden Berichten über seine Arbeit nirgends Zeichen vorhanden sind von Schwierigkeiten, welche die nötige Entwickelung der Theorie HERTZ etwa bereitet hätte, umsomehr, als es ihm zu dieser Zeit noch kaum gelungen war, den Umfang des schon Bekannten ganz zu überblicken. Aber eben darauf kam es bei ihm nicht so sehr an. Er fand offenbar auch schon zu dieser Zeit sehr schnell seine eigenen Wege durch ihm unbekannte Gebiete, auch ohne erst ängstlich die Spuren Anderer aufgesucht zu haben. So schreibt er eben in dieser Zeit auch das folgende: „(9. Febr. 1879.) Auch KIRCHHOFF ist in seinen Vorlesungen jetzt zum Magnetismus gekommen, und ein grofser Teil dessen, was er vorträgt, stimmt mit dem überein, was ich mir im Herbst zu Hause selbst entwickelt habe. Es ist nun zwar sehr unangenehm, hören zu müssen, dafs das alles schon sehr alte Geschichten sind, aber die Vorlesung wird einem dadurch bedeutend interessanter. Hoffentlich wird mein Wissen bald so weit sein, dafs ich weifs, was schon gethan ist, und mir nicht die Mühe mache, dasselbe nochmals zu suchen. Ich sehe übrigens zu meinem Troste, dafs wenigstens in dem speziellen Gebiet, auf welchem ich mich bisher versucht habe, das Neue mir allmählich seltener wird."

Seine Arbeit gewann den Preis: „(4. Aug. 1879). Für mich war der Erfolg ein günstiger, ich habe nicht nur den Preis erhalten, sondern das Urteil der Fakultät war so lobend abgefafst, dafs mir dies den Wert des Preises fast auf das Doppelte erhöht. . . . Ich war mit Dr. K und L. hingegangen [zur öffentlichen Verkündigung der Urteile] ohne etwas verraten zu haben, und fest entschlossen, mir nichts merken zu lassen, wenn der Erfolg ungünstig wäre." „(11. Aug. 1879.) Was den Preis selbst anlangt, so habe ich auf Euren Wunsch die Medaille genommen. Dies ist eine ganz grofse und schöne goldene Medaille, die aber das unglaubliche Ungeschick besitzt, nicht die mindeste Aufschrift zu tragen, nicht einmal, dass sie ein Preis der Universität sei."

Diese Preisarbeit, seine erste Forschungsarbeit, war es auch, von welcher HERTZ selbst in seiner Einleitung zu den

Digitized by Google

„Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft“ sagt, dafs er mit ihr beschäftigt gewesen sei, als v. Helmholtz ihn aufforderte, die grofse Preisfrage der Berliner Akademie zu bearbeiten.[1]) Man weifs, dafs und aus welchen Gründen er damals auf die Bearbeitung verzichtete. Er zog es vor, seine Kräfte an anderer, wenn auch bescheidenerer Arbeit zu üben, welche ihm erreichbaren Erfolg in Aussicht stellte.

So wandte er sich nun der theoretischen Untersuchung zu „Über die Induktion in rotierenden Kugeln“ (Nr. 2 dieses Bandes). Diese umfangreiche Arbeit entstand in erstaunlich kurzer Frist. Die erste Ausarbeitung — noch vorhanden — trägt von Hertz' Hand beigeschriebene Datierungen, so dafs man jetzt mit Verwunderung ersehen kann, in welcher Weise sie von Tag zu Tag fortschritt. Nachdem er in den Herbstferien 1879 zu Hause Vorstudien gemacht hatte, deren Resultate zu einem Teil in der erst zwei Jahre später veröffentlichten Abhandlung „Über die Verteilung der Elektricität auf bewegten Leitern“ enthalten sind (Nr. 3 dieses Bandes), begann er im November 1879 über die Induktion zu arbeiten, und schon im Januar darauf war die Abhandlung der philosophischen Fakultät als Doktordissertation vorgelegt. Auch die Briefe an seine Eltern berichten über diese raschen Fortschritte: „(27. Nov. 1879.) Ich habe das Laboratorium zwar belegt und habe dort anfangs auch gearbeitet, ich habe aber kein grofses Interesse an der Arbeit dort, und da mir jetzt zu Haus eine mehr theoretische Arbeit in die Hände gekommen ist, die mich sehr beschäftigt und mir viele Freude macht, so gehe ich diese Zeit nicht hin; es ist mir unangenehm, dafs ich es überhaupt belegt habe. Die Arbeit, die ich jetzt vorhabe, knüpft sich an das, was ich zu Haus gethan habe; wenn ich nicht noch die (eventuell mir sehr bittere) Erfahrung mache, dafs das betreffende Problem schon anderweitig gelöst ist, so wird sie meine Doktorarbeit werden.“ „(13. Dec. 1879). Von mir habe ich wenig zu melden; ich habe die Zeit an der Arbeit,

[1] Eben diese letztere Preisfrage der Akademie war aller Wahrscheinlichkeit nach diejenige Frage aus der Elektrodynamik, welche v. Helmholtz in der Voraussetzung vorgeschlagen hatte, dafs sein Schüler sich für dieselbe interessieren werde (vgl. v. Helmholtz' Vorwort zu den „Prinzipien der Mechanik“, daselbst S. IX, unten).

Digitized by Google

die ich angefangen, fast ohne mich umzusehen weitergearbeitet, und immer mit Erfolg und Freudigkeit, wie ich sie mir nicht besser wünsche." „(17. Jan. 1880.) Wie ich hier ankam [von Hamburg, aus den Weihnachtsferien] setzte ich mich gleich an meine Arbeit und hatte dieselbe denn auch am Ende der Woche fertig vor mir liegen, allerdings habe ich mich gut daran gehalten, da sie natürlich wieder viel umfangreicher geworden ist, als ich vermutet hatte." Nach Umfang steht allerdings diese zweite Arbeit in gewissem Gegensatze zu allen übrigen Veröffentlichungen von HERTZ; er hatte sich hier offenbar dem für Doktordissertationen Gebräuchlichen angeschlossen, so viel dabei auch dem Leser noch übrig gelassen ist. Das (von HELMHOLTZ verfaſste) Urteil der Berliner philosophischen Fakultät über HERTZ' Dissertation lautete: „Acuminis et doctrinae specimen laudabile"; sie verschaffte ihm, zusammen mit einem glänzend bestandenen Examen, den Doktortitel mit dem an der Berliner Universität seltenen Prädikate „magna cum laude".

Im nun folgenden Sommer 1880 war HERTZ wieder mit einer experimentellen Untersuchung beschäftigt über die Rückstandsbildung in Isolatoren, deren Resultate ihn indessen damals wenig zu befriedigen schienen; wenigstens hielt er sie des Aufschreibens nicht für wert. Erst v. HELMHOLTZ' besondere Aufforderung bewog ihn, später der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin über seine Arbeit zu berichten, was in der Sitzung vom 27. Mai 1881 geschah, und erst nach drei Jahren erschien sie in WIEDEMANN's Annalen (Nr. 14 unseres Bandes), nachdem die quantitativen Daten durch eine auf HERTZ' Anregung hin ausgeführte Wiederholung der Versuche wiedergewonnen waren.

Bald nachher, im Oktober 1880, war HERTZ Assistent bei v. HELMHOLTZ geworden. Er schwelgt nun im Besitze der Hilfsmittel des Berliner Institutes, und es beschäftigen ihn anfangs neben seinen Berufspflichten so viele verschiedene Probleme zu gleicher Zeit, experimenteller und auch theoretischer Natur, daſs er gelegentlich sein Bedauern ausspricht, nicht alle auf einmal bewältigen und nicht alle ihm zu Gebote stehenden Mittel zu gleicher Zeit benutzen zu können. Er säete gleichsam in dieser Zeit die Keime, welche sich dann im Verlaufe der drei Jahre seiner Assistententhätigkeit einer

Digitized by Google

nach dem anderen entwickelten zu den Arbeiten, welche sich nun als die Nrn. 4—16 in diesem Bande finden.

Zunächst gewann die Oberhand eine theoretische Untersuchung: „Über die Berührung fester elastischer Körper“ (Nr. 5). Es war HERTZ bei Gelegenheit häufiger Diskussionen über die NEWTON'schen Farbenringe in der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin aufgefallen, wie weit ins einzelne man zwar imstande sei, die Lichterscheinungen zwischen den Linsengläsern zu verfolgen, wie wenig man aber genaue Rechenschaft zu geben vermochte von den Formveränderungen der aufeinander gepreſsten Gläser an der Stelle ihrer Berührung. So versuchte er sich selbst an der Lösung des Problemes, und sie gelang ihm. Die Untersuchung machte ihre Hauptfortschritte in den Weihnachtsferien des Jahres 1880. Ihre Veröffentlichung, zunächst in Form eines Vortrages in der Physikalischen Gesellschaft (am 21. Jan. 1881), wurde sogleich mit groſsem Interesse begrüſst. Man erkannte zunächst, daſs die neu gewonnene Einsicht auch von groſser und unmittelbarer praktischer Bedeutung sei für alle feinen Messungen. So wurden z. B. damals zu Berlin gerade Basisbestimmungen der groſsen europäischen Gradmessung berechnet. Es waren bei diesen Bestimmungen die benutzten Stahlmaſsstäbe unter Zwischenlegung einer Glaskugel mit leichtem Drucke an einander gefügt worden. Diese elastische Berührung muſste je nach dem Drucke Raum gegeben haben zu einer Unsicherheit, über deren Gröſse indessen das sichere Urteil fehlte. Jetzt konnte die Frage sofort und mit Bestimmtheit beantwortet werden. Nicht minder bekundeten auch die Techniker ihr Interesse, und dies veranlaſste HERTZ, die Untersuchung neben anderen Arbeiten dann noch weiter auszuspinnen und sie auſser in BORCHARDT's Journal (Nr. 5 unserer Sammlung) auch noch in einer technischen Zeitschrift erscheinen zu lassen mit einem Zusatze über die Härte der Körper (Nr. 6). Er berichtet hierüber seinen Eltern wie folgt: „(9. Mai 1882.) Ich habe jetzt sehr viel geschrieben, da ich die bewuſste Arbeit noch einmal umgeschrieben habe für irgend eine technische Zeitschrift, da mir dies von mehreren Seiten als sehr wünschenswert bezeichnet wurde. . . . Ich habe auch ein Kapitel hinzugefügt über die Härte der Körper, und hoffe darüber am

Digitized by Google

Freitag in der Physikalischen Gesellschaft vorzutragen. Dies hat mir wieder Spafs gemacht. Die Härte ist nämlich eine Eigenschaft der Körper, von deren Wesen die Wissenschaft ungefähr eine eben so klare, i. e. völlig undeutliche Vorstellung hat, wie Jedermann. Mir war es nun durch die Arbeit völlig klar geworden, worin sie besteht; ich dachte aber, sie sei doch eigentlich eine zu unwichtige Eigenschaft, als dafs es sich verlohnte, etwas besonderes darüber zu schreiben, und in die rein mathematische Zeitschrift pafste eine solche Anwendung, die ziemlich viel Worte nötig machte, auch nicht recht. Ich dachte aber, an dieser Stelle könnte ich vielleicht jetzt etwas darüber anführen und ging deshalb in die Bibliothek der Gewerbeakademie, um mich umzusehen, was es wohl über die Härte gebe. Da fand ich, dafs es sogar ein Buch darüber gebe, 1867 von einem Franzosen geschrieben; ich fand da eine vollständige Übersicht über die früheren Versuche, die Härte scharf zu definieren und in rationeller Weise zu messen und viele eigene Versuche des Herrn zu dem gleichen Zweck, vermischt mit Versicherungen über die Wichtigkeit des Gegenstandes, alles aber, in Summa ein beträchtliches Quantum Arbeitskraft, nach meiner Meinung und teilweise nach eigenem Geständnis verlorene Mühe, weil das richtige Verständnis fehlte und die Messenden nicht wufsten, was sie mafsen. Da dachte ich, dafs ich nun mit ruhigem Gewissen meine Arbeit könnte einige Druckseiten länger machen, und ich hatte nun natürlich beim Schreiben viel mehr Vergnügen als ich sonst gehabt hätte."

Gleichzeitig mit den elastischen Problemen beschäftigten Hertz auch die Arbeiten über die Verdunstung (Nr. 8 und 9 dieses Bandes) und die zweite Untersuchung über die kinetische Energie bewegter Elektricität (Nr. 4). Beide waren schon im Sommer 1881 begonnen. Um die dreifache Arbeit zu seiner Befriedigung zu fördern, wandte er dann auch noch den gröfseren Teil der Herbstferien an dieselbe. So kam die Arbeit über die Trägheit der Elektricität sehr rasch zum Abschlusse; die Verdunstungsprobleme dagegen nahmen viel mehr Zeit in Anspruch, ohne doch viel Befriedigung zu bringen: „(15. Okt. 1881.) Ich habe mich jetzt ganz auf die Arbeit über die Verdunstung geworfen, zu der ich gleichfalls schon

Digitized by Google

im Frühjahr die Vorarbeiten gemacht habe und von der ich mir einstweilen noch etwas verspreche.“ „(10. März 1882.) Was meine jetzige Arbeit anlangt, so bin ich nichts weniger als zu einem befriedigenden Resultate gekommen, im Gegenteil, eines Tages zeigten mir neue Versuche, daſs ich einen groſsen Teil meiner Mühe, oder die ganze, auf unfruchtbaren Boden verwendet hatte, daſs Fehlerquellen vorhanden waren, die wohl kaum einer in der Gröſse vermuten konnte, und daſs das schöne positive Resultat, welches ich zu haben glaubte, sich in ein völlig negatives verwandelte. Zuerst war ich auch ganz zerschlagen, aber ich habe mich jetzt getröstet, und habe mehr Mut als vorher, nur um die schöne Zeit, die nicht wieder zu haben ist, thut es mir leid.“ „(13. Juni 1882.) Ich mache die Arbeit über die Verdunstung zur Veröffentlichung fertig, soviel davon noch übrig ist; die Arbeit ist mir so unbequem, daſs ich fast froh bin, sie nicht in ihrem ganzen, ursprünglichen Umfange ausarbeiten zu müssen.“

Mitten in die eben geschilderte Zeit angestrengter Arbeit fällt wie eine kleine, erholende Episode die Erfindung des Hygrometers (s. Nr. 7 dieses Bandes). Mit einer reizvollen Beschreibung dieses kleinen Instrumentes, „so einfach, daſs es fast gar nichts ist,“ giebt Hertz seinen Eltern auch Auskunft, wie die Zimmerluft Winters feucht zu halten sei. Vielleicht ist es nicht schlecht gethan, die Auskunft dem Leser nicht vorzuenthalten: „(2. Febr. 1882.) Übrigens hier eine kleine Berechnung zu Papas Befeuchtungsversuchen des Morgenzimmers: Im groſsen und ganzen enthält die Atmosphäre halb so viel Wasserdampf, als nötig ist, sie zu sättigen, oder 50% ist die mittlere relative Feuchtigkeit. Nehmen wir also an, daſs die Menschen für dies Verhältnis eingerichtet, oder daſs dies das gesunde Verhältnis sei. Dann müssen in 1 Kubikmeter Luft gewisse Wassermengen sein, die verschieden sind für verschiedene Temperaturen, und zwar 2·45 g bei 0° C., 4·70 g bei 10° C., 8·70 g bei 20° C., denn diese Mengen würden in der Luft die 50% relativer Feuchtigkeit geben. Nun wollen wir annehmen, es sei draufsen 0° und im Zimmer (geheizt) 20° C. Dann wird auch im Zimmer (da die Luft schliefslich doch von aufsen kommt) in 1 Kubikmeter Luft nur 2·45 g Wasser sein, es müfsten aber, um das richtige

Digitized by Google

Verhältnis herzustellen, 8·70 g sein, die Luft ist also relativ sehr trocken und es fehlen $6^1/_4$ g Wasser für das Kubikmeter. Da das Zimmer etwa 7 m breit, 7 m lang, 4 m hoch ist, so enthält es $7 \times 7 \times 4$ Kubikmeter und es fehlen also im Zimmer $7 \times 7 \times 4 \times 6^1/_4$ g oder nahe $1^1/_4$ Liter Wasser. Würde das Zimmer also hermetisch verschlossen, so müfsten $1^1/_4$ Liter Wasser versprüht werden, um das richtige Verhältnis zu haben. Nun ist das Zimmer nicht hermetisch verschlossen, nehmen wir an, es wechsle in *n* Stunden vollständig seine gesamte Luft, dann mufs in je *n* Stunden $1^1/_4$ Liter Wasser verdunstet oder versprüht werden. Ich glaube, dafs man annehmen kann, dafs in 2 bis 3 Stunden durch Thüröffnen, durch die Fensterspalten etc. die Luft vollständig gewechselt ist, es mufs also per Stunde $^5/_8$ bis $^5/_{12}$ Liter Wasser oder ein tüchtiges Wasserglas voll verdunstet werden. Ungefähr dasselbe gilt, sobald überhaupt geheizt wird und die Temperatur draufsen unter 10° C. ist. Wenn man ein Hygrometer aufstellte und vergliche die Feuchtigkeit ohne Verdunsten mit der mit Verdunsten, so könnte man daraus die Zeit finden, innerhalb welcher sich die Luft des Zimmers vollständig erneut ..... Dies ist eine etwas lange Vorlesung geworden, und der Brief wird mich in bedeutende Unkosten stürzen, indes was thut der Mensch nicht alles, um seine lieben Eltern und Geschwister vor dem gänzlichen Eintrocknen zu bewahren."

Sogleich nach Abschlufs der Verdunstungsarbeit wandte sich Hertz einem anderen Gebiete zu, welches er seitdem stets mit grofsem Interesse im Auge behalten, dem der elektrischen Entladungen in Gasen. Gleich in den vier ersten Wochen der Arbeit gelingt es ihm, eine bis dahin unbeachtet gebliebene Begleiterscheinung der Funkenentladung aufzufinden (s. die Nr. 12 dieses Bandes). Aber sein Scharfblick läfst ihn nicht lange bei derselben sich aufhalten; er plant vielmehr alsbald den Bau einer grofsen Sekundärbatterie, welche ihm als das geeignete Mittel erscheint, wichtigere Auskünfte zu erlangen. — Lassen wir ihn nun selbst berichten über seinen Eintritt in dies Gebiet und über sein Vordringen in demselben: „(29. Juni 1882.) Ich beschäftige mich den Tag über bis zum Abend mit den Lichterscheinungen in verdünnten Gasen, den sogenannten Geissler'schen Röhren, nur mufst Du dabei nicht

Digitized by Google

gerade an die gewöhnlich als Schaustücke gezeigten denken. Ich habe Lust, einmal auf einem etwas mehr experimentellen Gebiete zu arbeiten und die exakten Messungen bei Seite zu lassen; aufserdem ist das besagte Gebiet sehr dunkel und unerforscht und seine Erforschung ist wahrscheinlich von grofsem theoretischen Interesse. So möchte ich mir auf demselben Stoff für eine neue Arbeit suchen, einstweilen aber tummle ich mich ohne feste Methode auf demselben herum, indem ich das Bekannte kennen lerne, die Versuche wiederhole und die Versuche, welche mir gerade einfallen, anstelle; dies gewährt grofses Vergnügen, da die Erscheinungen meist wunderschön und aufserordentlich mannigfaltig sind. Auf das Gasblasen aber kommt viel dabei an; ich bin viel zu ungeduldig, als dafs ich heute eine Röhre beim Glasbläser bestellen könnte, die ich in einigen Tagen erst hätte, so beschränke ich mich lieber auf das, was meine geringe Kunst leisten kann. Auch im Punkte der Kosten fährt man wohl so. Man kann aber jeden Tag nur eine oder zwei Röhren anfertigen und unter verschiedenen Umständen betrachten, so ist es natürlich mühsame Arbeit. Wie gesagt, einstweilen laufe ich nur so in der Gegend herum und hoffe, dafs mir über die eine oder andere der hundert merkwürdigen Erscheinungen, die sich darbieten, ein Licht aufgehen wird." Vier Wochen später: „(31. Juli 1882.) Ich habe Vorversuche gemacht, um mir eine Batterie von 1000 Elementen zusammenzustellen, diese wird einiges Geld und sehr viel Mühe kosten, aber ich denke, sie wird sich dann als ein sehr wirksames Mittel des Vorwärtsdringens erweisen und die aufgewandten Kosten reichlich zurückzahlen." Nachdem er die Hälfte der nun eintretenden Herbstferien sich zur Erholung gegönnt, beginnt der Bau der Batterie. „(6. Sept. 1882.) Jetzt bin ich wieder hier, gut ausgeruht, ganz ungestört und habe mich daher zunächst auf die Herstellung der Batterie geworfen; ich arbeite denn auch ganz wie ein Fabrikarbeiter, da ich jeden Handgriff tausendmal zu wiederholen habe, so dafs ich stundenlang nichts thue als ein Loch neben dem anderen zu bohren, einen Blechstreifen nach dem anderen biegen, dann wieder stundenlang einen nach dem anderen lackieren etc. 250 Elemente habe ich schon fertiggestellt, die anderen 750 werden nun auf einmal gemacht; in acht Tagen, denke ich,

Digitized by Google

wird alles fertig sein. Es fällt mir sehr schwer, mich davon zu trennen, darum habe ich Euch noch nicht früher geschrieben. Auf einige Zeit mag ich die eintönige mechanische Beschäftigung ganz gern.“ „(20. Sept. 1882.) Die Batterie war in der Hauptsache Mitte voriger Woche fertig, seit vorigen Sonnabend hat sie angefangen Feuer zu spucken und elektrische Rohre zu erleuchten, heute habe ich mit ihr den ersten Versuch gemacht, den ich ohne sie nicht hätte machen können.“ „(7. Okt. 1882.) Ich habe einstweilen mit der Batterie zur Zufriedenheit gearbeitet und schon vor acht Tagen die erste Frage, welche ich mir gestellt hatte, wie ich glaube, erledigt (eine erledigte Frage, wenn sie wirklich erledigt ist, ist sehr viel!), aber diese erste Station wurde schon nur mit grofser Not erreicht, denn die Batterie meldete sich krank, und ihre Krankheit erwies sich sogar als sehr gefährlich.“ Es konnte indessen der Batterie durch vorbeugende Mittel noch für einige Zeit aufgeholfen werden, und es heifst später noch einmal: „Batterie sehr artig.“ Dafs und wie aber die Batterie schliefslich doch dem Verderben verfiel, weifs der Leser aus der Arbeit (Nr. 13) selbst. Es gelang, in sechswöchentlicher angestrengter Thätigkeit die hauptsächlichsten der geplanten Versuche vorher noch zu Ende zu führen. Die Veröffentlichung dieser Untersuchung erfolgte erst von Kiel aus, wo Hertz im April 1883 mit derselben als Privatdocent sich habilitierte. Diese Arbeit brachte ihm auch ein selten gespendetes Zeichen der Anerkennung von einer Seite, von welcher er sie aufs höchste schätzte. Zwei Schreiben von Helmholtz hielt Hertz als besonders teure Erinnerungszeichen aufbewahrt; in dem einen wurde ihm einst seine Ernennung zum Assistenten kundgegeben, das andere ist das folgende: „Berlin, 29. Juli 1883. Geehrter Herr Doktor! — Ich habe mit dem gröfsten Interesse Ihre Arbeit über die Glimmentladung gelesen und kann nicht umhin, Ihnen mein Bravo schriftlich zuzusenden. Die Sache scheint mir von der gröfsten Tragweite zu sein. Ich trage mich seit einiger Zeit mit dem Gedanken, ob nicht die Kathodenstrahlen die Ausbreitungsform eines plötzlichen Stofses auf den Maxwell'schen elektromagnetischen Aether sind, wobei die Elektrodenfläche die erste Wellenfläche bildete. Denn soweit ich sehe, müfste eine solche Welle sich genau so ausbreiten, wie jene Strahlen

Digitized by Google

es thun. Dann würde auch Ablenkung der Strahlen durch Magnetisierung des Mediums möglich sein. Longitudinalwellen wären leichter vorzustellen, und könnten existieren, wenn die Konstante k meiner elektrom. Arbeiten nicht Null wäre. Aber auch Transversalwellen könnten zustande kommen. Wie es scheint, hegen Sie ähnliche Gedanken; aber, wie es auch sei, genieren Sie sich nicht in der Verwendung der eben ausgesprochenen, denn ich habe für jetzt keine Zeit, sie auszuarbeiten, und sie drängen sich beim Lesen Ihrer Arbeit so von selbst auf, dafs Sie sie notwendig bald finden würden, wenn Sie sie noch nicht gefunden haben. . . . Mit besten Grüfsen Ihr H. HELMHOLTZ."

Noch eifrig beschäftigt mit der Vollendung jener Versuche über die Entladung, begann HERTZ nachzusinnen über ein anderes Problem, welches ihm, wie es scheint, die Winterszeit vorgelegt hatte, die da schwimmende Eisdecken über die Gewässer zog. „(Berlin, 24. Febr. 1883.) Mit den Arbeiten geht es ganz gut. Seit ich Euch zuletzt schrieb bis heute hat mich ausschliefslich ein Problem beschäftigt, das ich nicht aus dem Kopf bringen kann, nämlich das Gleichgewicht einer schwimmenden Eisplatte, auf welcher ein Mensch steht. Die Eisplatte wird sich natürlich etwas durchbiegen, etwa so [es folgt eine kleine Skizze der eingebogenen Platte], aber welche Form nimmt sie an, wie viel genau beträgt die Senkung etc.? Man kommt da zu ganz paradoxen Resultaten, nämlich erstens, dafs der Mensch zwar unter sich eine Vertiefung erzeugt, in einem gewissen Abstand aber eine kreisförmige Erhöhung des Eises, auf welche dann wieder eine Vertiefung folgt und so fort, etwa so [wieder Skizze]. Die Erhöhungen und Vertiefungen nehmen zwar so schnell ab, dafs man sie nie wird wahrnehmen können, aber für das geistige Auge sind unzählig viele zu erkennen. Noch viel paradoxer ist dies, dafs man unter gewissen Bedingungen eine Scheibe, die schwerer ist als Wasser, die also untersinkt wenn man sie auf Wasser legt, dadurch zum Schwimmen bringen kann, dafs man noch ein Gewicht auf sie setzt; sobald man dann das Gewicht abhebt, sinkt sie unter. Die Auflösung ist die, dafs mit dem Gewicht die Scheibe eine Bootform annimmt und nun das Gewicht und sich selber trägt; nimmt man nun von dem Gewicht

Digitized by Google

allmählich fort, so wird die Scheibe flacher und flacher, schliefslich kommt ein Augenblick, wo das Boot zu flach geworden ist und sie versinkt mit dem Rest des Gewichtes. Dies ist das Ergebnis der Theorie und so erläutere ich es mir, aber einstweilen sind Rechenfehler nicht ausgeschlossen. Es geht mir sonderbar mit einer solchen Sache; seit acht Tagen kämpfe ich, sie mir aus dem Kopfe zu bringen, da sie doch eigentlich sehr gleichgültig ist und ich anderes zu thun habe, zum Beispiel die event. Habilitationsarbeit aufzuschreiben, die ich nur im Kopfe fertig habe, aber keinen Strich auf dem Papier — aber es ist nicht möglich rein abzuschliefsen, immer bleibt irgend ein Widerspruch oder eine Unwahrscheinlichkeit, und so lange das ist, ist es mir fast unmöglich, den Geist davon fortzubringen. Und die Formeln für die richtige Lösung, welche ich habe, sind so verwickelt, dafs es immerhin viel Zeit und Mühe erfordert, ihre Bedeutung sich klar zu machen. Aber wenn ich auch ein Buch nehme oder sonst etwas thue, es kommen beständig die Gedanken darauf zurück: Sollte es nicht so gehen? Ist dies nicht doch ein Widerspruch? Das ist eine wahre Plage, wenn einem an dem Resultat gar nicht so viel liegt."

Der nun alsbald erfolgende Umzug nach Kiel, die Habilitation und seine Vorlesungen daselbst nahmen von jetzt ab HERTZ eine Zeit lang sehr in Anspruch, so dafs die Arbeit über die schwimmenden Platten erst ein Jahr später zur Veröffentlichung kam. Sie wurde dann alsbald abgelöst von der Untersuchung über die Grundgleichungen der Elektrodynamik (Nr. 17), welche ihn in Abwechselung mit den Vorlesungen und mit erholenden Beobachtungen unterm Mikroskope im Mai des Jahres 1884 beschäftigte, wie dies aus dem Tagebuche hervorgeht, welches er zu dieser Zeit führte. Nachdem daselbst an sechs aufeinanderfolgenden Tagen in knappen, aber ausdrucksvollen Worten bemerkt ist: „Abends tüchtig Elektrodynamik nach MAXWELL" und „ausschliefslich Elektrodynamik", folgt am Tage darauf, den 19. Mai: „Morgens glückte die elektrodynamische Frage". Der Leser wird sich hier der Bemerkung v. HELMHOLTZ' erinnern, dafs ihm die Lösung schwieriger Probleme am ehesten gelang, und dann oft wie unerwartet zufloſs, wenn der Geist erst in angestrengter Arbeit

Digitized by Google

alle Schwierigkeiten frei durchlaufen gelernt, und dann hiervon sich wieder ausgeruht hatte.

An diese Arbeit schlofs sich unmittelbar, dem Inhalte sowie der Zeitfolge der Entstehung nach, die andere an „Über die Dimensionen des magnetischen Poles“ (Nr. 18 dieses Bandes), und dieser folgte wieder auf dem Fufse das meteorologische Problem „Über die adiabatischen Zustandsänderungen feuchter Luft“ (Nr. 19). Das Zeichnen der Tafel, welche am Schlusse dieses Bandes nach dem Originale wiedergegeben ist, scheint HERTZ als eine erholende Abwechselung besonderes Vergnügen bereitet zu haben.

Die wissenschaftliche Geschichte von HERTZ' beiden Kieler Jahren ist vervollständigt, wenn wir noch hinzufügen, dafs er in dieser Zeit wiederholt, jedoch vergeblich, mit hydrodynamischen Problemen beschäftigt war, und ferner, dafs ihn seine Gedanken schon damals sehr vielfach auf dasjenige Gebiet führten, auf welchem ihm später so reiche Früchte beschieden waren. Fast fünf Jahre vor dem Gelingen der Versuche „Über Strahlen elektrischer Kraft“ findet sich hier die bemerkenswerte Notiz in seinem Tagebuche: „27. Januar 1884. Über elektromagnetische Strahlen nachgedacht“ und dann: „Über elektromagnetische Lichttheorie nachgedacht“. — Endlich wollte er auch experimentelle Arbeit nicht gerne missen, denn er war stets voll von Plänen zu Versuchen. So war er eifrig bemüht, sich in seiner Wohnung ein kleines Laboratorium einzurichten, wie er es mit seinen eigenen Mitteln und mit selbstgebauten Apparaten vermochte, sich zurückversetzend in die Zeit, da man noch über dem bescheidenen Spirituslämpchen arbeitete. Aber ehe die mehrfach begonnenen Versuche verschiedener Art zu einem Ziele geführt hätten, entrückte ihn der Ruf nach Karlsruhe seinen Plänen und enthob ihn dieser wenig erfolgreichen Bemühungen.

Mit diesem Ereignisse hört die Reihe der Abhandlungen dieses Bandes auf, den Faden zu bilden, welcher uns bis hierher durch die Lebensgeschichte ihres Verfassers geleitet hat. Der Zeitfolge der Entstehung nach schlössen sich hier die grofsen elektrischen Untersuchungen an, welche jetzt den Inhalt des zweiten Bandes der gesammelten Werke bilden. Wir bringen an ihrer Stelle in diesem ersten Bande die Worte,

Digitized by Google

mit welchen HERTZ den zu Heidelberg versammelten Naturforschern jene Entdeckungen verkündete, und welche noch heute in der Erinnerung Vieler lebendig sein werden.

Die vorletzte Nummer endlich dieses Bandes enthält die letzte Experimentaluntersuchung von HERTZ. Während seine Fachgenossen, und nunmehr in Bonn auch seine Schüler bestrebt waren, das von ihm neu erschlossene Gebiet weiter zu bebauen, hatte er sich seinem früheren Studium wieder zugewandt, den elektrischen Entladungen in Gasen. Und wieder gelang es ihm alsbald, Unerwartetes zu entdecken. Er fand die Durchlässigkeit der Metalle für Kathodenstrahlen am Beginne des Sommer-Semesters 1891. Die Versuche wurden bald abgebrochen und dann erst später veröffentlicht, denn es nahmen von nun ab die Prinzipien der Mechanik, der Gegenstand des letzten Werkes von HERTZ, seine ganze Aufmerksamkeit in Anspruch.

Digitized by Google

Digitized by Google

1. Versuche zur Feststellung einer oberen Grenze für die kinetische Energie der elektrischen Strömung.

Aus WIEDEMANN's Annalen der Physik und Chemie. Bd. 10. S. 414—448. 1880.

Nach den Gesetzen der Induktion ist die Intensität i in einem linearen Stromkreise, in welchem die variable elektromotorische Kraft A wirkt, gegeben durch einen Anfangswert und die Differentialgleichung:

$$iw = A - 2P\frac{di}{dt} \quad ,$$

in welcher w den Widerstand, P das Potential des Leiters auf sich selbst bezeichnet. Durch Multiplikation mit idt folgt die Gleichung:

$$Aidt = i^2 w\,dt + d(Pi^2) \quad ,$$

welche zeigt, dafs das durch obige Gleichung gegebene Gesetz im Einklange steht mit dem Prinzipe von der Erhaltung der Energie, unter der Voraussetzung nämlich, dafs die von der Kette geleistete Arbeit einerseits und die im Stromkreise gewonnene Wärme und die vermehrte potentielle Energie andererseits die einzigen in Betracht kommenden Arbeitsgröfsen sind. Diese Voraussetzung ist nicht erfüllt, und es können also die obigen Gleichungen exakte Gültigkeit nicht beanspruchen in dem Falle, dafs sich die Elektricität mit einer trägen Masse bewegt, deren Einflufs nicht völlig verschwindet. In diesem Falle ist der rechten Seite der zweiten Gleichung ein Glied hinzuzufügen, welches der vermehrten kinetischen Energie der Strömung entspricht. Letztere ist dem Quadrate der Stromstärke proportional, kann also $= mi^2$ gesetzt werden, wo m eine von den Verhältnissen der Strombahn abhängige Kon-

Digitized by Google

stante ist; und es treten daher an Stelle der obigen Gleichungen die korrigierten:

$$Ai\,dt = i^2 w\,dt + d(Pi^2) + d(mi^2) \quad ,$$

$$iw = A - 2P\frac{di}{dt} - 2m\frac{di}{dt} \quad ,$$

$$= A - 2(P+m)\frac{di}{dt} \quad .$$

Ganz analoge Schlüsse lassen sich auch in dem Falle anwenden, dafs wir ein System von Stromkreisen vor uns haben, in welchen die elektromotorischen Kräfte A_1, A_2... wirken. Nach Einführung der Korrektur für die Masse nehmen die bekannten Differentialgleichungen, welche die Intensitäten bestimmen, die Form an:

$$i_1 w_1 = A_1 - 2(P_{11} + m_1)\frac{di_1}{dt} - P_{12}\frac{di_2}{dt} - \ldots - P_{1n}\frac{di_n}{dt} \quad ,$$

$$i_2 w_2 = A_2 - P_{12}\frac{di_1}{dt} - 2(P_{22}+m_2)\frac{di_2}{dt} - \ldots - P_{2n}\frac{di_n}{dt} \quad ,$$

$$\vdots$$

$$i_n w_n = A_n - P_{1n}\frac{di_1}{dt} - \ldots\ldots - 2(P_{nn}+m_n)\frac{di_n}{dt} \quad .$$

Die einzige Änderung, welche eine träge Masse der Elektricität in diesen Gleichungen hervorgebracht hat, besteht sonach in einer scheinbaren Vergröfserung der Eigenpotentiale, und es erhellt ohne weiteres:

1) dafs die elektromotorische Kraft der Extraströme unabhängig ist von den gleichzeitig in anderen Leitern hervorgerufenen Induktionsströmen und den in diesen bewegten Massen,

2) dafs die Integralwerte der Induktionsströme nicht beeinflufst werden von den bewegten Massen, weder der induzierenden noch der induzierten Leiter,

3) dafs dagegen die Integralintensität der Extraströme gröfser erscheint, als die aus der einfachen Induktionswirkung berechnete.[1])

[1]) Unter Hinweis auf diese einfachen Schlüsse war von der philosophischen Fakultät der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin den Studierenden für das Jahr 1879 die Aufgabe gestellt worden, über die

Digitized by Google

Der Wert dieser Vergröfserung hängt ab von den Gröfsen m, deren Bedeutung jetzt näher erläutert werden möge und zwar unter Zugrundelegung der Weber'schen Anschauung von der elektrischen Strömung. Das Vorhandensein der mit den Gröfsen m verbundenen Glieder ist übrigens unabhängig von der Richtigkeit dieser Anschauung und von der Existenz elektrischer Flüssigkeiten überhaupt; jede Erklärung des Stromes als eines Bewegungszustandes träger Materie wird diese Glieder gleichfalls einführen müssen, und nur die Auslegung der Gröfsen m wird eine verschiedene sein.

Es enthalte die Volumeneinheit des Leiters λ Einheiten positiver Elektricität, und es sei die Masse jeder Einheit $= \varrho$ Milligramm. Die Länge des Leiters sei l und sein überall als gleich vorausgesetzter Querschnitt $= q$. Dann enthält die Längeneinheit des Leiters $q\lambda$ elektrostatische Einheiten, und die gesamte im Leiter bewegte positive Elektricität hat die Masse $\varrho.q.\lambda.l$ mg. Die Anzahl der elektrostatischen Einheiten, welche bei der Intensität i (in elektromagnetischem Mafse) in der Zeiteinheit durch den Querschnitt gehen, ist einerseits $= 155\,370.10^6\, i$, andererseits gleich der Geschwindigkeit v, multipliziert mit $q\lambda$. Sonach ist:

$$v = \frac{155\,370.10^6}{q\lambda}\, i \quad ,$$

und die kinetische Energie der im Leiter enthaltenen positiven Elektricität:

$$= \tfrac{1}{2} l \varrho q \lambda \left\{\frac{155\,370.10^6}{\lambda}\right\}^2 \frac{i^2}{q^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\frac{li^2}{q} \cdot \varrho \frac{155\,370^2\, 10^{12}}{\lambda} = \tfrac{1}{2}\mu \frac{li^2}{q} \quad .$$

Die Gröfse $\frac{1}{2}li^2/q$ ist in endlichen Mafsen angebbar, die Gröfse $\varrho\, 155\,370^2 10^{12}/\lambda$, welche mit μ bezeichnet worden ist, ist eine

Gröfse von Extraströmen Versuche auszuführen, aus welchen wenigstens eine obere Grenze für die bewegte Masse würde festgestellt werden können. Es war schon in der Aufgabe darauf hingewiesen, dafs zu diesen Versuchen die Extraströme aus doppeldrähtigen Spiralen, deren Zweige in entgegengesetzter Richtung durchflossen wären, besonders geeignet sein würden. Die vorliegende Arbeit ist im wesentlichen identisch mit derjenigen, welche des Preises gewürdigt wurde.

Digitized by Google

Konstante, welche nur vom Material des Leiters abhängt und für verschiedene Leiter den Dichtigkeiten der Elektricität in denselben umgekehrt proportional ist. Ihrer Dimension nach ist dieselbe eine Fläche; mit der Bezeichnung Milligramm-millimeter versehen giebt sie die lebendige Kraft beider Elektricitäten, d. h. die gesamte kinetische Energie der Strömung in einem Kubikmillimeter eines Leiters, in welchem die magnetische Stromdichtigkeit 1 herrscht.

Die Bestimmung der Gröfse μ, oder doch einer oberen Grenze für dieselbe, war die Aufgabe der vorliegenden Versuche.

Methode der Versuche.

Da wir die lebendige Kraft der gesamten Elektricität einmal $= mi^2$, das andere Mal $= (l\mu/q)i^2$ gesetzt haben, so folgt μ aus m nach der Formel $\mu = qm/l$. Zur Bestimmung von m würde es hingereicht haben, die Intensität J des Extrastromes in einem Leiter zu bestimmen, dessen Potential P und Widerstand w in absolutem Mafse bekannt waren. Aus der Gleichung $J = (2i/w)(P + m)$ würde sich m ohne weiteres ergeben. Da aber die Messung der Extraströme nur in verzweigten Leitersystemen möglich ist, also eine grofse Zahl von Widerständen zu bestimmen wäre, so empfiehlt es sich mehr, in derselben Leitung durch zwei verschiedene Potentiale Extraströme zu erregen, wodurch zwei Gleichungen für die Gröfsen w und m erhalten werden. Verhält sich die Intensität im unverzweigten Stromkreise zu derjenigen Intensität, nach welcher der Extrastrom gemessen wird, wie $\alpha : 1$, und ist J die gemessene Intensität, so sind die in Betracht kommenden Gleichungen:

$$\frac{\alpha w J}{i} = 2P + 2m, \qquad \frac{\alpha w J'}{i'} = 2P' + 2m ,$$

und also:

$$m = \frac{P\frac{J'}{i'} - P'\frac{J}{i}}{\frac{J}{i} - \frac{J'}{i'}} .$$

Man wird gut thun, das eine Potential P' so grofs zu nehmen, dafs der Einflufs der Masse jedenfalls dagegen ver-

Digitized by Google

schwindet, das andere Potential P dagegen möglichst klein zu wählen. Man kann alsdann die Gleichungen einfacher schreiben:

$$\frac{\alpha w J}{i} = 2P + 2m, \qquad \frac{\alpha w J'}{i'} = 2P',$$

$$m = \frac{i' J}{i J'} P' - P, \quad \text{oder, wenn } i' = i \text{ :}$$

$$m = P\left\{\frac{J P'}{J' P} - 1\right\}.$$

Nach diesem Prinzipe wurden die Versuche ausgeführt Als stromgebende Leitersysteme dienten bei den ersten Versuchsreihen doppeldrähtige Spiralen, bei den späteren geradlinig ausgespannte Doppeldrähte. Diese Drahtsysteme konnten ohne Änderung ihres Widerstandes so geschaltet werden, dafs die beiden Zweige derselben in gleichem und in entgegengesetztem Sinne durchströmt waren. Die aus beiden Schaltungen resultierenden Potentiale wurden durch die Rechnung und die Intensitäten der aus beiden erfolgenden Extraströme durch den Versuch bestimmt. Waren diese Intensitäten den berechneten Potentialen proportional, so konnte der Einfluſs einer Masse nicht nachgewiesen werden; wurde eine Abweichung von der Proportionalität konstatiert, so folgte die lebendige Kraft der Strömung nach den obigen Formeln.

Die Messung der Extraströme geschah allemal mittels einer Wheatstone'schen Brücke, in deren einen Zweig das stromgebende Drahtsystem eingeschaltet war, während das Potential der anderen Zweige so klein als möglich gemacht wurde. Die Brücke war so abgeglichen, dafs ein dieselbe durchfliefsender konstanter Strom keine dauernde Ablenkung der Galvanometernadel hervorrief; wurde dann aber die Richtung desselben aufserhalb der Brücke umgekehrt, so passierten zwei gleiche und gleichgerichtete Extraströme das Galvanometer, deren Integralintensität durch den Ausschlag der Nadel gemessen wurde. Sobald die Nadel von ihrem Ausschlag zurückkehrte, konnte dann die Umschaltung wiederholt und so die Multiplikationsmethode in Anwendung gebracht werden.

Als Hauptschwierigkeit trat diesen Messungen die geringe Gröfse der zu beobachtenden Extraströme entgegen, welche

Digitized by Google

die eben beschriebene Methode in ihrer einfachsten Gestalt unmöglich machte. Allerdings konnte man schon durch bloſse Steigerung der induzierenden Stromstärke die Extraströme beliebig groſs machen, aber die Schwierigkeiten, welche eine genaue Regulierung der Brücke hatte, wuchsen weit schneller, als die so erhaltenen Intensitäten. Bei den gröſsten Stromstärken, bei welchen eine solche Regulierung noch dauernd möglich war, bewegte ein einzelner Extrastrom aus entgegengesetzt durchströmten Zweigen die Nadel des Galvanometers nur um Bruchteile eines Skalenteiles, während schon die Annäherung der Hand an einen Quecksilbernapf oder die Strahlung einer entfernten Gasflamme auf die Spiralen hinreichte, Ausschläge der Nadel von mehr als 100 Skalenteilen hervorzurufen. Ich versuchte daher, die Anwendung sehr starker Ströme dadurch zu ermöglichen, daſs ich dieselben nur auf Augenblicke durch die mittels eines schwachen Stromes regulierte Brücke leitete. Es zeigte sich indessen, daſs die infolge der Wärmewirkungen des Stromes momentan in der Brücke entstandenen elektromotorischen Kräfte von derselben Ordnung waren, wie die der zu beobachtenden Extraströme, sodaſs brauchbare Resultate nicht erhalten wurden. Nur so viel zeigten die auf diese Weise angestellten Versuche, daſs eine bedeutende Abweichung vom Potentialgesetz jedenfalls nicht stattfinde.

Um deshalb auch mit schwächeren Strömen messbare Ausschläge zu erhalten, leitete ich bei jedem Durchgang der Nadel durch die Ruhelage eine gröſsere Zahl von Extraströmen in gleicher Richtung durch das Galvanometer. Zu dem Ende wurde der Strom im geeigneten Augenblick aufserhalb der Brücke 20 mal schnell hintereinander umgeschaltet, zugleich aber zwischen jeder Umschaltung des Stromes das Galvanometer gewendet. Dasselbe blieb aufserdem, um jede stärkere Dämpfung zu vermeiden, nachdem die Brücke einmal reguliert war, im allgemeinen geöffnet und wurde nur während der Zeit mit der übrigen Kombination in Verbindung gesetzt, welche zur Erzeugung der Extraströme notwendig war.

Die genannten Operationen wurden mittels eines besonderen Kommutators ausgeführt und nahmen ca. 2 Sekunden in Anspruch, eine Zeit, welche hinreichend groſs ist, um

Digitized by Google

sämtliche Extraströme zur vollen Entwickelung gelangen zu lassen, und sich auch als hinreichend klein gegen die Schwingungsdauer der Nadel erwies.

Diese Methode bot mehrere Vorteile dar. Zunächst konnten genau meſsbare Wirkungen schon mit sehr schwachen und daher auch sehr konstanten erzeugenden Strömen hervorgerufen werden. In allen folgenden Versuchen bestand der äuſsere Stromkreis aus einem DANIELL'schen Element und einem Ballastwiderstand von 3 bis zu 80 S.-E. Sind ferner die Widerstände der Brücke nicht genau abgeglichen, und passiert infolge davon auch von dem konstanten Strom ein Teil das Galvanometer, so wird doch dieser Teil im Galvanometer beständig seine Richtung ändern, so daſs, wenn die Ungleichheit nur klein ist, der durch sie verursachte Fehler fast völlig verschwindet.

Da weiter die Verbindung des Galvanometers mit den übrigen Drähten der Kombination ihre Richtung beständig ändert, so werden diejenigen in der Brücke bestehenden oder durch den Strom erregten elektromotorischen Kräfte, welche ihre Richtung nicht mit der Richtung des Stromes ändern, ohne Einfluſs auf die Nadel sein. Von groſsem Werte ist der Umstand, daſs während des gröſsten Teiles der Schwingung das Galvanometer allen störenden Einflüssen entzogen war.

Infolge dieser günstigen Bedingungen zeigten die Versuche eine bei der Kleinheit der zu messenden Gröſsen befriedigende Übereinstimmung, die Abweichung der erhaltenen Resultate vom Mittel war im allgemeinen kleiner als $\frac{1}{30}$ des ganzen Wertes. Auch hier wurde das Verfahren bei jedem Durchgang der Nadel durch die Ruhelage wiederholt. Bis zur Erlangung eines konstanten Ausschlags konnte indessen die Multiplikation nicht fortgesetzt werden, denn zu der konstanten und geringen Dämpfung der Nadel durch den Luftwiderstand kam die nur kurze Zeit wirkende Dämpfung, welche durch die Einschaltung des Galvanometers in die Brücke entstand. Die Dauer dieser Einschaltung war nicht immer genau dieselbe, die daherrührende Dämpfung also auch nicht genau bestimmbar. Da nun ihr Einfluſs bei weiten Schwingungen sehr merklich wird, so war das Verfahren auf kleinere Ausschläge beschränkt, und es wurden daher im allgemeinen nur

Digitized by Google

7 bis 9 Elongationen gemessen. Das Verfahren, nach welchem aus den erhaltenen ganzen Schwingungsbogen der wahrscheinlichste Wert des Extrastromes bestimmt wurde, soll zunächst auseinandergesetzt werden.

Es sei T die Schwingungsdauer der Galvanometernadel, λ das beständig wirkende logarithmische Dekrement, $q = e^{-\lambda}$ das Verhältnis einer Schwingung zur vorhergehenden und zur Abkürzung:

$$\frac{T}{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}} e^{-\frac{\lambda}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{\pi}{\lambda}} = \varkappa \quad .$$

Ferner seien a_1, a_2, a_3 die successiven Elongationen rechts und links von der Ruhelage, $\alpha_1 = a_1 + a_2$, $\alpha_2 = a_2 + a_3$ etc. die ganzen Schwingungsbogen, und k_1, $k_2 \ldots$ die Inkremente der Geschwindigkeit in der Ruhelage, welche die Induktionsstöfse messen. Dann ist, wenn von einer besonderen Dämpfung während des Stofses einstweilen abgesehen wird:

$$\begin{aligned} a_2 &= k_1 \varkappa + q a_1 \\ a_3 &= k_2 \varkappa + q a_2 = k_2 \varkappa + q k_1 \varkappa + q^2 a_1 \quad , \end{aligned}$$

also wird:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \varkappa . k_1 + a_1 (1+q) \\ \alpha_2 &= \varkappa . k_2 + \varkappa k_1 (1+q) + a_1 q (1+q) \quad . \end{aligned}$$

Wird die erste Gleichung, mit q multipliziert, von der zweiten subtrahiert, so wird erhalten:

$$\begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_1 q &= (k_1 + k_2)\varkappa \text{ und analog} \\ \alpha_3 - \alpha_2 q &= (k_2 + k_3)\varkappa \\ &\vdots \\ \alpha_n - \alpha_{n-1} q &= (k_{n-1} + k_n)\varkappa \quad . \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir den Mittelwert der Stöfse $k_1 \ldots k_n$, welche alle gleich sein müfsten, wenn die Apparate exakt arbeiteten:

$$\varkappa k = \frac{\alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n - q(\alpha_1 + \alpha_2 \ldots + \alpha_{n-1})}{2(n-1)} \quad ,$$

oder, wenn die Summe der ganzen Schwingungsbogen mit Σ bezeichnet wird:

Digitized by Google

$$\varkappa k = \frac{(\Sigma - a_1) - q(\Sigma - a_n)}{2(n-1)} \quad .$$

Die Anwendung dieser Formel ist sehr bequem und empfiehlt sich immer dann, wenn die einzelnen Stöfse nicht regelmäfsig genug sind, um einen konstanten Grenzwert der Schwingung hervorzubringen, oder wenn aus anderen Gründen nur eine beschränkte Zahl von Elongationen beobachtet worden ist.

Tritt zu der beständig wirkenden Dämpfung noch eine momentane während der Schliefsung, so kann letztere als ein der Bewegung entgegen gerichteter Stofs betrachtet werden, welcher proportional der Dauer der Schliefsung und der Geschwindigkeit der Nadel ist. Ist letztere $= v$, erstere $= \tau$, das logarithmische Dekrement während der Schliefsung $= \lambda'$, so ist die Gröfse eines solchen Stofses:

$$-4\frac{\lambda'}{T}.\tau.v \quad .$$

Sind nun a_1 und a_2 die voraufgehende und die nachfolgende Elongation, so erreicht die Nadel die Ruhelage mit der Geschwindigkeit $a_1 q / \varkappa$ und verläfst dieselbe mit der Geschwindigkeit $a_2 / \varkappa$; da das Anwachsen der Geschwindigkeit sehr nahezu gleichförmig geschieht, ist für v der mittlere Wert $(a_1 q + a_2)/2\varkappa$ zu setzen, und die Gröfse des ganzen Stofses wird daher:

$$-2\frac{\lambda'\tau}{T\varkappa}(a_1 q + a_2) = -\frac{c}{\varkappa}(a_1 q + a_2) \quad .$$

Indem wir diesen Geschwindigkeitszuwachs zu dem durch den Induktionsstofs veranlafsten k addieren, erhalten wir zunächst die Gleichungen:

$$a_2 = k_1\varkappa + a_1 q - c(a_2 + a_1 q) \quad ,$$
$$a_3 = k_2\varkappa + a_2 q - c(a_3 + a_2 q) \text{ etc.}$$

oder:

$$(1+c)\,a_2 = k_1\varkappa - (1-c)\,a_1 q \quad ,$$
$$(1+c)\,a_3 = k_2\varkappa - (1-c)\,a_2 q \text{ etc.} \quad ,$$

und durch eine ähnliche Rechnung wie oben:

Digitized by Google

$$(1+c)\,\alpha_2 - (1-c)\,q\alpha_1 = (k_2+k_1)\,\varkappa \quad ,$$
$$(1+c)\,\alpha_3 - (1-c)\,q\alpha_2 = (k_3+k_2)\,\varkappa \quad ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(1+c)\,\alpha_n - (1-c)\,q\alpha_{n-1} = (k_n+k_{n-1})\,\varkappa \quad .$$

Schreiben wir an Stelle der Gröfsen $k_1 \ldots k_n$ ihren theoretischen Wert k, so erhalten wir nach einer einfachen Umformung die Gleichungen:

$$\alpha_2 - q\alpha_1 + c\,(\alpha_2+q\alpha_1) = 2k\varkappa \quad ,$$
$$\alpha_3 - q\alpha_2 + c\,(\alpha_3+q\alpha_2) = 2k\varkappa \quad ,$$
$$\vdots$$
$$\alpha_n - q\alpha_{n-1} + c\,(\alpha_n+q\alpha_{n-1}) = 2k\varkappa \quad ;$$

und aus diesen sind nach der Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werte der unbekannten Gröfsen k und c zu bestimmen.

Die sehr weitläufige Rechnung wurde indessen nicht für alle Beobachtungen durchgeführt, sondern es wurde aus einer Anzahl derselben der Wert von c bestimmt und das Mittel der erhaltenen wenig differierenden Werte für die übrigen Beobachtungen als richtig angenommen. Ist c bekannt, so folgt einfacher:

$$k\varkappa = \frac{(\Sigma-\alpha_1) - q(\Sigma-\alpha_n) + c\big((\Sigma-\alpha_1) + q(\Sigma-\alpha_n)\big)}{2(n-1)} \quad .$$

Da das mit c behaftete Glied überhaupt nur als Korrektur auftritt, kommt es auf eine haarscharfe Bestimmung von c gar nicht an. Dadurch, dafs man das Mittel aus zwei successiven Stöfsen bildet, nämlich:

$$k_m\varkappa = \frac{\alpha_m - q\alpha_{m-1} + c(\alpha_m+q\alpha_{m-1})}{2} \quad ,$$

kann man sich Kenntnis davon verschaffen, wie weit die einzelnen Werte vom Mittel abweichen.

Da im folgenden immer nur die Endresultate gegeben werden sollen, will ich eine Multiplikationsreihe mit Berechnung der einzelnen Stöfse vollständig mitteilen, um die Übereinstimmung der Versuche unter sich beurteilen zu lassen.

Digitized by Google

Extraströme aus geradlinigen Drähten (bei gleichsinnig durchströmten Drähten.)

Intensität des induzierenden Stromes: 75,7.

$q = 0{,}9830, \quad c = 0{,}016.$

Ablesung corr. auf Bogen	Schwingungsbogen α_n	$\alpha_n - q\alpha_{n-1}$	$\alpha_n + q\alpha_{n-1}$	Gröfse der einzelnen Stöfse in Skalenteilen $k\varkappa = \frac{\alpha_n - q\alpha_{n-1} + c(\alpha_n + q\alpha_{n-1})}{2}$
517,2	30,7	—	—	—
547,9	72,0	41,8	102,3	21,7
475,9	111,3	40,5	182,5	21,7
587,2	149,4	40,0	258,8	22,1
437,8	186,5	39,6	338,4	22,4
624,3	222,3	39,0	405,6	22,7
402,0	254,7	36,2	473,2	21,9
656,7	285,5	35,1	535,9	21,8
371,2				

Im Mittel ergiebt sich $k\varkappa = 22{,}05$, die gröfste Abweichung beträgt weniger als $\frac{1}{30}$ des Wertes. Da in jedem Stofs 40 Extraströme vereinigt waren, so betrug der von jedem einzelnen hervorgerufene Ausschlag nicht mehr als 0,551 Skalenteil. Etwa denselben Grad der Übereinstimmung zeigten auch die übrigen Multiplikationsreihen, für welche die einzelnen Stöfse berechnet wurden.

Beschreibung der Apparate.

Ehe ich zu den einzelnen Versuchen übergehe, will ich diejenigen Anordnungen beschreiben, welche allen Versuchen gemeinsam waren.

1. Sollte bei gleicher induzierender Stromstärke und gleichen Werten der Potentiale die Intensität des Extrastromes im Galvanometer ein Maximum sein, so mufste der Widerstand des Galvanometers möglichst klein, derjenige der übrigen Zweige aber gleich sein. Diese Anordnung hatte noch einen besonderen Vorteil. Es bieten sich nämlich dem Schliefsungsstrom und dem Öffnungsstrom verschiedene Wege dar, da sich der erste auch durch die äufsere Schliefsung entladen kann, der zweite nicht. Um daher alle Versuche auf gleiche Verhältnisse zu reduzieren, mufs im allgemeinen eine Korrektur angebracht werden, welche von dem Widerstand der äufseren

Digitized by Google

Schliefsung abhängig ist. Diese Korrektur fällt weg, wenn der Widerstand der vier Zweige gleich ist. In der That, ist w dieser Widerstand, w_g der Widerstand des Galvanometers und w_x der Widerstand der Kette, so folgt für die Intensität im Galvanometer, wenn in einem Zweige die elektromotorische Kraft E wirkt, nach den gewöhnlichen Formeln $E/2(w+w_g)$, welcher Wert von w_x unabhängig ist.

Wurden also die vier Zweige gleich gemacht, so konnten die mit verschiedenen Ketten erhaltenen Resultate ohne weiteres verglichen werden.

2. Die passiven Widerstände der Brücke mufsten so gewählt werden, dafs der aus ihnen herrührende Teil des Extrastromes möglichst klein war. Es würden sich in dieser Hinsicht unpolarisierbare Flüssigkeitssäulen mit grofsem Durchmesser am meisten empfohlen haben, da das Potential solcher Säulen sehr klein ist. Indessen gelang es mir bei der grofsen Empfindlichkeit der Brücke nicht, solche von hinreichender Konstanz herzustellen. Ich wandte deshalb dünne Neusilberdrähte an, die durch Glasröhren gezogen und mit destilliertem Wasser umgeben waren, um gegen Temperaturänderungen geschützt zu sein. Dieselben wurden so angeordnet, dafs die verschiedenen Zweigen angehörigen und in entgegengesetzter Richtung durchflossenen nebeneinander zu liegen kamen. Die noch übrig bleibenden Werte des Potentials waren klein und konnten mit hinreichender Genauigkeit in Rechnung gezogen werden. Da die Neusilberdrähte sehr dünn waren, lag die Gefahr nahe, dafs dieselben bei der Umschaltung des Stromes geringen, aber schnell eintretenden Temperaturänderungen ausgesetzt seien. Solche Änderungen würden im Moment des Entstehens des Stromes die Brücke ungleich gemacht und so eine schwer zu kontrollierende Vergröfserung oder Verkleinerung des Extrastromes hervorgerufen haben. Bei einer letzten Versuchsreihe wandte ich daher cylindrische Stäbe von Bunsen'scher Gaskohle, von 5 mm Durchmesser an, wie solche zur Erzeugung des elektrischen Lichtes gebraucht werden.

3. Die Messung der Intensität des induzierenden Stromes geschah aufserhalb der Brücke; die angewandte Tangentenbussole bestand aus einem einfachen Kupferbügel von 213,2 mm Durchmesser, in dessen Mittelpunkt eine Nadel von ca. 25 mm

Digitized by Google

Länge an einem einfachen Coconfaden aufgehängt war. Um die Schwingungen derselben möglichst stark zu dämpfen, war sie in ein Gefäfs mit destilliertem Wasser eingelassen. Die Ablesung geschah mit Skala und Fernrohr, die Entfernung der ersteren von der Bussole betrug 1295 mm, 1 Skalenteil Ablesung entspricht der absoluten elektromagnetischen Intensität 0,01218. Die Messung geschah unter allen Umständen so, dafs der Ausschlag nach rechts, nach links und wieder nach rechts beobachtet wurde. Das Resultat ist bis auf $\frac{1}{100}$ seines Wertes sicher.

Zur Messung der Extraströme diente ein MEYERSTEIN'sches Galvanometer von sehr geringem Widerstande, wie solche bei Messungen mit dem Erdinduktor angewandt werden. Das Nadelpaar war astatisch an 12 einfachen Coconfäden aufgehängt, die Schwingungsdauer desselben betrug 27,66 Sekunden. Das Galvanometer war auf einem isolierten Steinpfeiler, 2905 mm von Skala und Fernrohr und etwa ebensoweit von der Brückenvorrichtung entfernt aufgestellt und mit letzterer durch parallele dicke Kupferdrähte verbunden.

4. Der Kommutator hatte bei jedem Durchgang der Nadel durch die Ruhelage schnell hintereinander die folgenden Operationen auszuführen:

Einschaltung des Galvanometers in die Brücke,
Umschaltung des Stromes,
Umschaltung des Galvanometers
... (20mal wiederholt), ...
Umschaltung des Stromes,
Ausschaltung des Galvanometers.

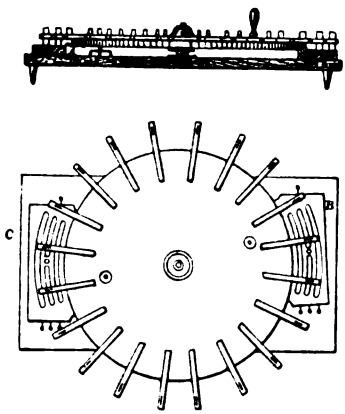


Fig. 1.

Seine Einrichtung ist aus Fig. 1 ersichtlich. Am Rande einer um eine vertikale Axe drehbaren Scheibe sind in radialer Stellung 20 amalgamierte Kupferhäkchen von der Form Fig. 2 angebracht, welche in das Quecksilber der Gefäfse *B* und *C* eben eintauchen. Sie stehen der Axe abwechselnd näher und ferner, so dafs die inneren Spitzen der

Digitized by Google

ferneren mit den äufseren Spitzen der näheren auf einem Kreise um die Axe liegen. Indem sie über das Gefäfs *B* gleiten, schalten sie den Strom, indem sie über *C* gleiten, das Galvanometer um. Die Einrichtung der Quecksilbergefäfse und die Art, wie die Umschaltung vor sich geht, ist aus Fig. 3 zu ersehen. Das Gefäfs *B* steht dem Gefäfs *C* nicht genau gegenüber, sondern ist um die halbe Entfernung zweier Haken gegen dasselbe verschoben, so dafs die Umschaltung des Galvanometers zwischen je zwei Umschaltungen des Stromes fällt. Während nach Erteilung des Induktionsstofses die Nadel ihre Schwingung vollendet, stehen die Haken symmetrisch zum Gefäfs *C*, derart, dafs ein Haken über die Lücke des mittleren Napfes, die benachbarten rechts und links neben die Näpfe zu stehen kommen; die Verbindung des Galvanometers mit der Brücke ist dann aufgehoben. Sobald die Nadel die Ruhelage erreicht, wird die Scheibe mit der Hand gedreht und nach einer ganzen Umdrehung durch eine einfache Arretierung festgehalten, dabei führt dann der Kommutator die oben angegebenen Operationen aus.

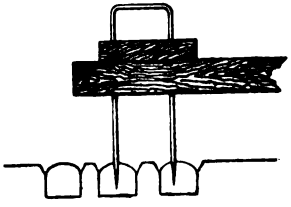


Fig. 2.

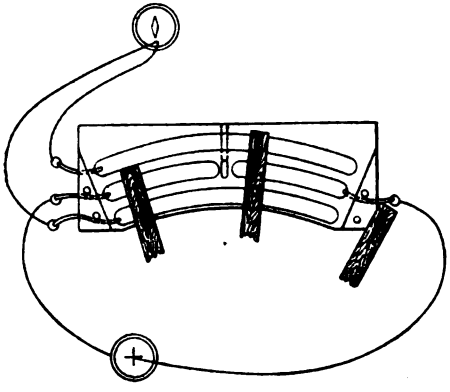


Fig. 3.

Im allgemeinen mag noch bemerkt werden, dafs die Drähte der Brücke, wo es irgend anging, direkt miteinander verlötet waren, nur wo Verbindungen häufig zu lösen und wiederherzustellen waren, wurden Klemmschrauben und Quecksilbernäpfe angewandt.

Digitized by Google

Versuche mit doppeldrähtigen Spiralen.

Ich komme jetzt zu den einzelnen Versuchen, zunächst zu denjenigen mit doppeldrähtigen Spiralen. Zu denselben standen mir zwei vollkommen gleiche, sehr regelmäfsig gewickelte Spiralen zu Gebote, deren Länge 73,9 mm, deren äufserer und innerer Durchmesser resp. 83,6 und 67,3 mm betrugen. Sie bestanden aus 8 Schichten zu je 68 Windungen. Die Gesamtlänge des Drahtes wurde durch Vergleichung mit dem Widerstand der obersten Schicht bestimmt und zu 130032 mm gefunden. Der Durchmesser des Drahtes betrug 0,93 mm, der Gesamtwiderstand ca. 3,1 S.-E. Da die Spiralen vollkommen gleich waren, wurden sie gleichzeitig benutzt und in die diagonal gegenüberstehenden Zweige der Brücke eingeschaltet. Die aus ihnen herrührenden Extraströme summierten sich dann in der Brücke.

Gemäfs den obigen Auseinandersetzungen waren die Induktionswirkungen zweier Potentiale P und P' zu beobachten, während der Widerstand der Leitung unverändert blieb. Das Potential P war das der in entgegengesetzter Richtung durchströmten Spiralen. Um ein zweites Potential P' zu erhalten, schaltete ich einen Zweig einer Spirale aus der Leitung aus und ersetzte ihn durch einen ihm gleichen Ballastwiderstand, dessen Gröfse sich in der Brücke sehr genau regulieren liefs.

Indem nun durch den freigewordenen Zweig ein Strom geleitet und in passender Weise umgeschaltet wurde, konnte der von dem einen Zweig im anderen induzierte Strom gemessen werden. Die Gröfse P' war dann das Potential des einen Zweiges auf den anderen. Natürlich hätte auch der Extrastrom aus den in gleicher Richtung durchströmten Spiralen benutzt werden können, dieser aber war gegen denjenigen aus entgegengesetzt durchströmten Spiralen zu grofs, um unter gleichen Bedingungen noch gut beobachtbar zu sein.

Es handelt sich zunächst um die Bestimmung der numerischen Werte von P und P'. P läfst sich aus den geometrischen Verhältnissen der Spiralen mit hinreichender Annäherung bestimmen und soll die Rechnung sogleich durchgeführt werden; P' hingegen läfst sich auf diesem Wege nur unter vereinfachenden Annahmen finden, welche einen beträchtlichen

Digitized by Google

Fehler mit sich bringen. Ich zog es daher vor, dasselbe durch den Versuch zu bestimmen, indem ich es mit dem bekannten Potential geradliniger Drähte verglich.

Bestimmung von P. Über die Lagerung der Drähte werden zunächst die folgenden Voraussetzungen gemacht, welche der Wahrheit sehr nahe kommen dürften:

1) In einer und derselben Schicht wechseln positiv und negativ durchströmte Drähte beständig ab, die Abstände der Mittellinien sind gleich und gleich dem mittleren Abstand, welchen man erhält, wenn man die Länge der Spirale durch die Zahl der Windungen dividiert. 2) Zwei benachbarte Schichten liegen seitlich um den halben Abstand zweier Mittelpunkte gegeneinander verschoben. Durch diese Annahmen ist die geometrische Lage der Drähte vollständig gegeben; ob aber die äufsersten Drähte an den Enden der Spirale alle in gleichem Sinne durchströmt sind, oder ob Wechsel in dieser Hinsicht stattfinden, läfst sich für die inneren Schichten nicht konstatieren. Aus diesem Grunde und wegen der unvermeidlichen Unregelmäfsigkeiten ist eine exakte Bestimmung des Potentiales auch nicht möglich; es lassen sich nur Grenzen angeben, innerhalb deren es liegen mufs, und es wird sich zeigen, dafs diese Grenzen ziemlich eng gezogen werden können. Bei der Berechnung des Potentiales einer Schicht auf sich selbst werden wir, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, dieselbe aufschneiden, in eine Ebene ausbreiten und als Teil eines unendlich langen geradlinigen Drahtsystems betrachten können, dessen Querschnitt mit dem der Schicht zusammenfällt. Denn die Lagerung jedes Elementes zu den benachbarten Teilen wird dadurch nicht geändert, die Wirkung entfernter Teile aufeinander aber ist Null.

Zunächst bestimmen wir das Potential Π einer einzelnen Schicht auf sich selber. Sei die Länge der Drähte $= S$, ihr Radius $= R$, der Abstand zweier benachbarten $= q$, endlich ihre Zahl $= n$. Sei ferner $\frac{1}{2}a_0$ das Potential eines Drahtes auf sich selber, a_m das Potential eines Drahtes auf den in der Entfernung mq befindlichen, dann ist:

$$a_0 = 2S\left(\log \frac{2S}{R} - \tfrac{3}{4}\right), \quad a_m = 2S\left(\log \frac{2S}{mq} - 1\right)$$

Digitized by Google

und man findet durch Abzählung:

$$\Pi = na_0 - (2n-1)a_1 + (2n-2)a_2 - \ldots - a_{2n-1} \quad ,$$

und durch Einsetzung der Werte für die a:

$$\Pi = 2Sn\left\{\tfrac{1}{4} + \log\frac{q}{R} + \frac{1}{n}\log\frac{1^{2n-1}\cdot 3^{2n-3}\ldots(2n-3)^3(2n-1)}{2^{2n-2}\cdot 4^{2n-4}\ldots(2n-2)^2}\right\} \quad .$$

Der Quotient Π/S hat also hier einen bestimmten Wert, welcher als das Potential der Längeneinheit bezeichnet werden kann.

Die direkte Berechnung des in obigem Ausdruck enthaltenen Logarithmus ist bei grofsen n nicht mehr wohl möglich, für solche ist daher ein Näherungswert zu finden. Zu dem Ende zerlegen wir den Ausdruck in:

$$n\log\frac{1^2 3^2 5^2\ldots(2n-3)^2(2n-1)}{2^2 4^2\ldots(2n-2)^2}$$
$$+\log\frac{2^2}{1.3}\cdot\frac{4^4}{3^2 5^2}\cdot\frac{6^6}{5^3 7^3}\cdots\frac{(2n-2)^{2n-2}}{(2n-3)^{n-1}(2n-1)^{n-1}} \quad ,$$

welche Teile gesondert berechnet werden sollen. Der erste kann geschrieben werden:

$$= n\sum_1^{n-1} m\log\frac{(2m-1)(2m+1)}{(2m)^2} = n\sum_1^{n-1}\log\left(1-\frac{1}{4m^2}\right) \quad .$$

Da $1/4m^2$ für alle in Betracht kommenden Werte < 1 ist, können wir $\log(1-1/4m^2)$ entwickeln und erhalten für den ersten Teil:

$$-n\left\{\tfrac{1}{4}\sum_1^{n-1}\frac{1}{m^2} + \tfrac{1}{3\,2}\sum_1^{n-1}\frac{1}{m^4} + \ldots\right\} \quad ,$$

oder, wenn wir die Summen nach bekannten Formeln entwickeln:

$$= -n\left\{\text{const.} - \frac{1}{4(n-1)} + \frac{1}{8(n-1)^2} - \frac{1}{24(n-1)^3} + \ldots - \frac{1}{96(n-1)^3} + \ldots\right\} .$$

Die Konstante ist offenbar $= -\log(2/\pi)$, denn für unendlich werdende n mufs der ganze Ausdruck gegen die Grenze $n\log(2/\pi)$ konvergieren. Entwickeln wir die übrigen Glieder nach fallenden Potenzen von n und fassen die gleichen Potenzen zusammen, so erhalten wir schliefslich den ersten Teil gleich:

Digitized by Google

$$\log\left(\frac{2}{\pi}\right)^n + \tfrac{1}{4} + \frac{1}{8n} + \frac{5}{96n^2} + \cdots$$

Eine ganz analoge Rechnung läfst sich für den zweiten Teil durchführen, derselbe ist:

$$= \sum_1^{n-1} \log \frac{2m^{2m}}{(2m-1)^m (2m+1)^m} = \sum_1^{n-1} \log\left(1 - \frac{1}{4m^2}\right)^m$$

$$= \tfrac{1}{4} \sum_1^{n-1} \frac{1}{m} + \tfrac{1}{3\,2} \sum_1^{n-1} \frac{1}{m^3} + \tfrac{1}{1\,9\,2} \sum_1^{n-1} \frac{1}{m^5} + \cdots$$

also nach der gleichen Rechnung wie oben:

$$= \tfrac{1}{4} \left(0{,}577216 + \log(n-1) + \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{12(n-1)^2} + \cdots\right)$$

$$+ \tfrac{1}{3\,2} \left(\sum_1^{\infty} \frac{1}{m^3} + \cdots \qquad - \frac{1}{2(n-1)^2} + \cdots\right)$$

$$+ \tfrac{1}{1\,9\,2} \left(\sum_1^{\infty} \frac{1}{m^5} + \cdots \right)$$

$$+ \tfrac{1}{1\,0\,2\,4} \left(\sum_1^{\infty} \frac{1}{m^7} + \cdots \right)$$

$$+ \cdots$$

Wird hierin das konstante Glied direkt berechnet, die übrigen Glieder aber nach fallenden Potenzen von n entwickelt, so wird der zweite Teil erhalten:

$$= 0{,}18848 + \tfrac{1}{4} \log n - \frac{1}{8n} - \frac{7}{192n^2} - \cdots$$

Die Summe beider Teile ergiebt das ganze gesuchte Glied:

$$= 0{,}43848 + \log \sqrt[4]{n} \left(\frac{2}{\pi}\right)^n + \frac{3}{192n^2} + \cdots$$

$$= \log\left\{1{,}5503 \sqrt[4]{n} \left(\frac{2}{\pi}\right)^n\right\} + \frac{3}{192n^2} + \cdots$$

$$= n \log\left\{\sqrt[4n]{5{,}7773\,n} \cdot \frac{2}{\pi}\right\} + \frac{3}{192n^2} \cdots,$$

und sonach wird mit beträchtlicher Annäherung das Potential der Schicht auf sich selber:

Digitized by Google

$$\Pi = 2Sn\left\{\tfrac{1}{4} + \log\frac{2q\sqrt[4n]{5{,}7773n}}{R\pi}\right\} .$$

Für grofse n konvergiert die in dem Ausdrucke enthaltene Wurzel rasch gegen die Einheit, für solche Werte von n kann daher auch einfacher geschrieben werden:

$$\Pi = 2Sn\left\{\tfrac{1}{4} + \log\frac{2q}{R\pi}\right\} .$$

Zu dieser Annäherung gelangen wir direkt, wenn wir das Potential der ganzen Vorrichtung auf einen mittleren Draht berechnen und den erhaltenen Wert als für alle Drähte gültig annehmen. Dieser vereinfachten Methode können wir uns bedienen bei der Berechnung des Potentiales zweier verschiedener Schichten aufeinander.

Es sei ε der senkrechte Abstand zweier Schichten voneinander, und es mögen in denselben die einzelnen Drahtpaare solche Lagen haben, dafs sich die gleichsinnig durchströmten Drähte gegenüberliegen, so dafs ihre Axen in einer zu beiden Schichten senkrechten Ebene sich befinden. Dann ist das Potential der einen Schicht auf einen mittleren Draht der anderen Schicht:

$$= 2S\left\{\begin{array}{llll} \log 2S & -\log\varepsilon & & -1 \\ -2\log 2S & +2\log\sqrt{\varepsilon^2+q^2} & & +2 \\ +2\log 2S & -2\log\sqrt{\varepsilon^2+4q^2} & & -2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\log 2S & +\log\sqrt{\varepsilon^2+(2n+1)^2q^2} & & +1 \end{array}\right\} ,$$

$$= -2S\log\frac{\varepsilon(\varepsilon^2+2^2q^2)(\varepsilon^2+4^2q^2)\dots(\varepsilon^2+(2n)^2q^2)}{(\varepsilon^2+q^2)(\varepsilon^2+3^2q^2)\dots\sqrt{\varepsilon^2+(2n+1)^2q^2}} ,$$

$$= 2S\log\frac{1^2+\left(\frac{\varepsilon}{q}\right)^2}{\frac{\varepsilon}{q}}\cdot\frac{3^2+\left(\frac{\varepsilon}{q}\right)^2}{2^2+\left(\frac{\varepsilon}{q}\right)^2}\cdots\frac{\sqrt{(2n+1)^2+\left(\frac{\varepsilon}{q}\right)^2}}{\varepsilon^2+(2n)^2q^2} .$$

Für das hinter dem Logarithmenzeichen stehende Produkt erhalten wir einen Näherungswert in geschlossener Form, wenn wir die Gleichung:

Digitized by Google

$$\cos^2\frac{z}{2} = \left(1-\frac{z^2}{1^2\pi^2}\right)^2\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)^2\left(1-\frac{z^2}{5^2\pi^2}\right)^2\cdots$$

durch die andere:

$$\sin z = z\left(1-\frac{z^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots$$

dividieren, beiderseits $z = \varepsilon\sqrt{-1}$ setzen und durch $\sqrt{-1}$ dividieren; wir erhalten hierdurch die Gleichung:

$$\frac{1+e^{-v}}{1-e^{-v}} = \lim\left\{\frac{1^2+\left(\frac{v}{\pi}\right)^2}{\frac{v}{\pi}}\cdot\frac{3^2+\left(\frac{v}{\pi}\right)^2}{2^2+\left(\frac{v}{\pi}\right)^2}\cdots\frac{\sqrt{(2n-1)^2+\left(\frac{v}{\pi}\right)^2}}{(2n)^2+\left(\frac{v}{\pi}\right)^2}\right\},$$

und sonach wird das obige Potential für ein grofses n näherungsweise:

$$= 2S\log\frac{1+e^{-\frac{\varepsilon\pi}{q}}}{1-e^{-\frac{\varepsilon\pi}{q}}},$$

oder bei Vernachlässigung von Gliedern von der Ordnung $e^{-3\pi\varepsilon/q}$

$$= 4Se^{-\frac{\varepsilon\pi}{q}}.$$

Indem wir diesen Ausdruck mit $2n$ multiplizieren, erhalten wir das Potential der einen Schicht auf die andere:

$$= +8Sne^{-\frac{\varepsilon\pi}{q}}.$$

Wird nun die eine derselben gegen die bisher angenommene Lage seitlich um die Strecke q verschoben, so wird offenbar das Potential:

$$= -8Sne^{-\frac{\varepsilon\pi}{q}};$$

für alle mittleren Lagen hat das Potential eine zwischen beiden extremen Werten liegende Gröfse. Wenn wir also den Einflufs der verschiedenen Schichten aufeinander überhaupt vernachlässigen, so beträgt der Fehler für jedes in Betracht kommende Paar von Schichten weniger als $8Sne^{-\varepsilon\pi/q}$.

Digitized by Google

Dabei sind jedoch je zwei unmittelbar benachbarte Schichten nicht in Rechnung zu bringen, da das Potential derselben aufeinander in der That mit grofser Annäherung gleich Null ist. Durch Einsetzung solcher Werte von q, ε, R, welche den gewöhnlichen Verhältnissen entsprechen, überzeugt man sich leicht, dafs der besprochene Fehler weniger als den 70ten Teil des Potentiales der Schicht ausmacht. Insoweit wir aber von demselben absehen, erhalten wir das Potential der ganzen Spirale, indem wir das der einzelnen Schichten auf sich selbst einfach addieren, und es wird dasselbe daher schliefslich, wenn wir mit l die gesamte in der Spirale enthaltene Drahtlänge bezeichnen:

$$P = l\left\{\tfrac{1}{4} + \log\frac{2q\sqrt[4n]{5{,}7773n}}{R\pi}\right\} .$$

Für die in unserem Falle vorliegenden Spiralen war:

$$l = 130032\,\text{mm}, \qquad n = 34, \qquad R = 0{,}465\,\text{mm},$$
$$q = 1{,}087\,\text{mm}, \qquad P = 89250\,\text{mm}.$$

Eine Bestimmung des hierbei möglicherweise begangenen Fehlers nach den obigen Prinzipien ergab denselben kleiner als 1200 mm.

Bestimmung von P'. Das Potential P' des einen Zweiges der Spirale auf den anderen wurde, wie schon bemerkt, durch Vergleichung mit dem Potential geradliniger Drähte bestimmt. Die Anordnung des Versuches zeigt die Fig. 4. A und B sind geradlinige, auf dem Boden des Laboratoriums ausgespannte Drahtsysteme von den eingeschriebenen Dimensionen, in A (dem induzierten Kreise) ist das Galvanometer und ein Zweig der Spirale C eingeschaltet, in B die Kette, die Tangentenbussole und der Kommutator.

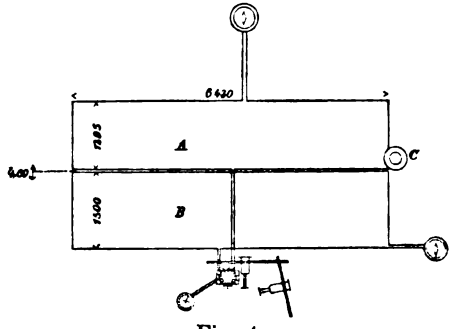


Fig. 4.

Digitized by Google

Es wurde zunächst die induzierende Wirkung des Kreises B auf A bestimmt. Da diese sehr klein war, so wurde die schon oben beschriebene Beobachtungs- und Rechnungsart in Anwendung gebracht, bei welcher der Kreis A im allgemeinen geöffnet war. Da die Wirkung des geradlinigen Systems B auf die Spirale C nicht Null war, so wurde letztere auf beide möglichen Arten in den Kreis A eingeschaltet. Die Werte des Induktionsstofses wurden bei verschiedenen Intensitäten des induzierenden Stromes beobachtet; nachdem sie auf gleiche Intensität (100 Skalenteile der Tangentenbussole) reduziert waren, wurden sie gefunden

1) bei der ersten Schaltung der Spirale:

in Skalenteilen des Galvanometers

0,3997 0,3955 0,3791 0,4006 Mittel 0,3939;

2) bei der zweiten Schaltung:

0,3034 0,3102 Mittel 0,3068.

Das Mittel aus beiden Werten, nämlich 0,3502, entspricht der Induktion des Kreises B auf A. Das zugehörige logarithmische Dekrement war das der freischwingenden Nadel, nämlich:

$$\lambda = 0{,}0172.$$

Um mit den bei einer anderen Dämpfung gemachten Versuchen vergleichbar zu sein, mufs der Stofs multipliziert werden mit:

$$\frac{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}{T} e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{\pi}{\lambda}};$$

er wird erhalten nach Ausführung der Rechnung:

$$= \frac{1{,}1097}{T}.$$

Hierauf wurde der noch freie Zweig der Spirale C in den Strom B so eingeschaltet, dafs sich die Wirkungen der Spirale und der geraden Drähte verstärkten und durch einfache Umschaltung des Stromes B bei jedem Durchgange der Nadel durch die Ruhelage die Wirkung des einen Zweiges auf den anderen beobachtet. Nach Reduktion auf die Intensität 100 wurden die Werte der Induktionsstöfse zu

164,3 164,7 im Mittel zu 164,5 Skalenteilen

Digitized by Google

gefunden. Das zugehörige Dekrement war diesmal $\lambda = 0{,}6362$, die entsprechende Reduktion auf eine ungedämpft schwingende Nadel giebt die Gröfse des Stofses:

$$= \frac{696{,}0}{T} \quad .$$

Von der Verschiedenheit der Schwingungsdauer je nach der statthabenden Dämpfung kann hier und im Folgenden abgesehen werden. Demnach verhält sich das Potential der Zweige der Spirale aufeinander zu dem der geradlinigen Drähte aufeinander wie:

$$696{,}0 - 1{,}1 : 1{,}1097 = 694{,}9 : 1{,}1097.$$

Das letztere Potential konnte leicht aus den geometrischen Verhältnissen der Drähte berechnet werden und wurde gefunden = 60428 mm, woraus dann das Potential des einen Zweiges der Spirale auf den anderen folgt:

$$= 37\,840\,000 \text{ mm}.$$

Die gleiche Gröfse hatte ich schon einmal auf einem etwas anderen, aber ungenaueren Wege bestimmt und gleich

38 680 000 mm

gefunden. Beide Werte stimmen hinreichend überein, es soll jedoch nur der erstere benutzt werden.

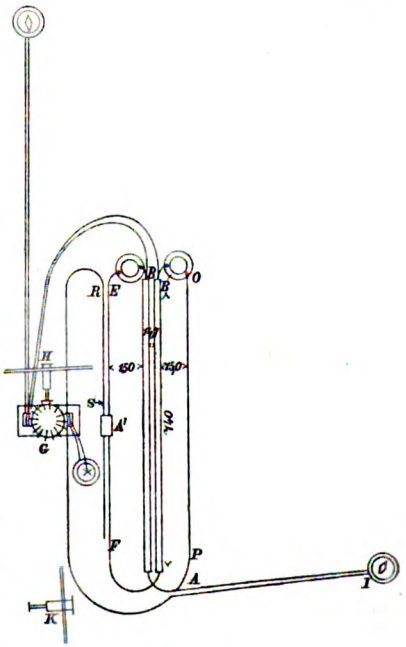


Fig. 5.

Ausführung der Messungen. Die Anordnung der Brücke, welche zur Messung der Extraströme diente, ist in Figur 5 genauer wiedergegeben. Die Einmündungsstellen des Stromes sind A und A', die des Galvanometerdrahtes B und B'. Durch Verschiebung der Verbindung A' der Kette mit dem dicken Kupferdrahte EF wurde die Brücke reguliert. In die diagonal

Digitized by Google

gegenüberliegenden Zweige $A'B$ und AB' sind die Spiralen und in die anderen beiden Zweige die als passive Widerstände dienenden Neusilberdrähte eingeschaltet, letztere sind dicht nebeneinander so gelegt, dafs der Strom in ihnen entgegengesetzte Richtung hat. Die von der Kette kommenden und die zum Galvanometer führenden Drähte passieren den Kommutator G, welcher so gestellt ist, dafs er während der Beobachtung durch das Fernrohr H in Thätigkeit gesetzt werden kann. Bei einer Umdrehung desselben gehen 20 doppelte Extraströme aus je zwei Spiralen, im ganzen also 80 einfache Extraströme durch das Galvanometer. Die Tangentenbussole befindet sich in J, zu ihr gehört das Fernrohr K.

Zunächst wurde die Gröfse des Extrastromes aus entgegengesetzt durchströmten Zweigen bestimmt und für dieselbe die folgenden Werte erhalten:

Induzierende Intensität in Skalenteilen	Intensität des Extrastromes in Skalenteilen
48,8	0,1790
50,0	0,1738
123,2	0,4621
122,2	0,4417

Durch Reduktion auf die Intensität 100 werden die Werte erhalten:

0,3664 0,3476 0,3750 0,3600 im Mittel 0,3622.

Das logarithmische Dekrement der Nadel während dieser Versuche war $\lambda = 0{,}0172$, wird der obige Stofs dem entsprechend mit $3{,}168/T$ multipliziert, so wird er erhalten:

$$= \frac{1{,}1476}{T} .$$

Gemäfs den früheren Auseinandersetzungen wurde sodann ein Zweig der einen Spirale ausgeschaltet, die Brücke wieder ausgeglichen und die Induktionswirkung des frei gewordenen Zweiges auf den anderen beobachtet. Verschwand in dem ersteren ein Strom von der Intensität 100, so betrug der im Galvanometer beobachtete Stofs:

61,50 61,66 im Mittel 61,58 Skalenteile.

Das bei diesem Versuche vorhandene logarithmische Dekrement

Digitized by Google

war $\lambda = 0{,}4396$, der entsprechende Reduktionsfaktor $3{,}876/T$, und es wird sonach der reduzierte Stofs:

$$\frac{238{,}67}{T} .$$

Bei den in der Brücke vorhandenen Widerständen und Stromverzweigungen entsprach also dieser Stofs dem Potential:

$$P' = 37\,840000.$$

Waren die Zweige der Spiralen in entgegengesetzter Richtung durchströmt, so war die entsprechende elektromotorische Kraft des Extrastromes für jede Spirale:

$$2P = 178500.$$

Hierzu tritt jedoch als Korrektur das Potential der übrigen Teile der Brücke, welches sich in folgender Weise berechnet:

1) Das Potential jedes Neusilberdrahtes auf sich selbst (Durchmesser 0,246 mm) war 6395, der vierfache Wert ist negativ in Rechnung zu ziehen, also der Beitrag -25580.

2) Diese Wirkung wird zum Teil aufgehoben durch die Wirkung des benachbarten Neusilberdrahtes, das Potential beider aufeinander ist 5348, dieser Wert ist doppelt in Rechnung zu bringen, also wird erhalten $+10696$.

3) Das doppelte Potential des Drahtes OP auf sich selbst ist $+9028$.

4) Das Potential des Drahtes OP auf den näheren Neusilberdraht ist $+2789$.

5) Dasselbe auf den entfernteren -1230.

6) Das Potential des Drahtes RS auf EA', doppelt in Rechnung gezogen wegen der doppelten Intensität in RS, giebt den Beitrag $+5254$.

Die Summe aller dieser Korrekturen beträgt nur $+957$, wovon also auf jede einzelne Spirale die Hälfte kommt, nämlich $+478$ mm.

Es kommt also schliefslich zur Geltung die elektromotorische Kraft 178978, welche fast genau so grofs ist wie die allein aus den Spiralen herrührende. Der Fehler dieses Wertes, welcher aus Vernachlässigung einzelner Teile des Potentiales der Spiralen herrührt, beträgt nach dem Vorigen bis zu 2400 mm, von derselben Ordnung wird vermutlich der Fehler sein, wel-

Digitized by Google

cher aus Vernachlässigung einzelner Teile der Brücke entspringt.

Nach der Theorie müfste nun der Wert des Extrastromes aus entgegengesetzt durchströmten Spiralen die Gröfse haben:

$$\frac{238{,}67}{T} \cdot \frac{178\,978}{37840000} = \frac{1{,}1351}{T} \quad .$$

Der thatsächlich beobachtete Wert war $1{,}1476/T$. Die Abweichung beider beträgt wenig mehr als $\frac{1}{100}$ des ganzen Wertes, während die Fehler der Beobachtung und die Unbestimmtheit der Rechnung im besten Falle $\frac{1}{30}$ desselben ausmachen. Ist daher auch die grofse Übereinstimmung des berechneten und des beobachteten Wertes eine zufällige, so zeigt der Versuch doch, dafs höchstens $\frac{1}{20}$ bis $\frac{1}{30}$ des an sich sehr kleinen Extrastromes aus doppeldrähtigen Spiralen seine Entstehung einer trägen Masse der bewegten Elektricität verdanken kann, und dafs die oben angegebene Formel das Potential einer solchen Spirale in der That mit grofser Annäherung giebt.

Weiterer Versuche mit Spiralen glaubte ich mich überheben zu dürfen; wenn auch die Beobachtung zu gröfserer Genauigkeit geführt werden könnte, so war doch eine exakte Bestimmung der in Betracht kommenden Potentialwerte durch die Rechnung nicht möglich.

Erste Versuchsreihe mit geradlinigen Drähten.

Um in dieser Hinsicht günstigere Bedingungen des Versuches zu erlangen, versuchte ich die Gröfse des aus entgegengesetzt durchströmten geradlinigen Doppeldrähten herrührenden Extrastromes zu bestimmen und mit der Theorie zu vergleichen.

Zu diesen Versuchen war die Brücke in folgender Weise geordnet. Drei der vier Widerstände, welche sämtlich wie früher gleich waren, wurden durch dünne Neusilberdrähte gebildet; zwei von diesen waren vollkommen gleich gestaltet, so dafs die aus ihnen entspringenden Extraströme sich aufhoben; der dritte bestand aus einem in sich zusammengefalteten Draht, dessen Potential klein und genau zu berechnen war, es wurde gefunden $p = 6597$ mm. Diesem letzteren ent-

Digitized by Google

gegen wirkte der vierte Widerstand der Brücke, das zu untersuchende Drahtsystem. Dasselbe war auf dem Boden des Laboratoriums ausgespannt und mit dem Experimentiertisch durch vertikale Drähte verbunden; es hatte die Gestalt eines Rechtecks von 7229 mm Länge, 946 mm Breite, dessen Seiten aus je zwei in geringem Abstande verlaufenden Drähten bestanden, deren jeder einen Zweig des Systems bildete. Durch einen Kommutator konnte bewirkt werden, dafs beide Zweige in gleicher oder in entgegengesetzter Richtung durchströmt wurden. Der benutzte Draht war harter Kupferdraht, sein Durchmesser wurde an mehreren Stellen mit Mikroskop und Mikrometerschraube bestimmt und mit kleinen Abweichungen im Mittel = 0,4104 mm gefunden. Um den Abstand der beiden Zweige genau festzuhalten, wurden die Drähte über Holzstützen mit genau passenden Einschnitten geleitet. Diese Stützen wurden mit Hilfe zweier zunächst angefertigter Messingschablonen hergestellt. An letzteren wurde die Entfernung der Drähte mit Mikroskop und Mikrometerschraube gemessen und so im Mittel gefunden gleich 2,628 mm von Mitte zu Mitte. Um die Drähte gegen schnelle Temperaturänderungen durch Luftströme zu schützen, waren dieselben in ihrer ganzen Länge mit einer Hülle von Baumwolle umgeben.

Das Potential der ganzen Vorrichtung, welche nur aus teils parallelen, teils zueinander senkrechten Drähten bestand, war nach den schon früher angegebenen Formeln leicht und exakt zu bestimmen; es fand sich:

1) bei gleichgerichteter Durchströmung der Zweige:

$$P' = 486\,200\,\text{mm};$$

2) bei entgegengesetzt gerichteter Durchströmung der Zweige:

$$P = 96580\,\text{mm}.$$

Es ergiebt sich sonach das Intensitätsverhältnis der in beiden Fällen zu erwartenden Extraströme:

$$= \frac{P' - p}{P - p} = 5{,}330 \quad .$$

In dieser Berechnung ist nur vernachlässigt die Wirkung der Kommutatoren, der verschiebbaren Vorrichtung zur Regu-

Digitized by Google

lierung der Brücke, und die des äufseren Stromkreises auf die Teile der Brücke. Der Einfluſs dieser Wirkungen ist sehr klein, und der aus ihnen entspringende Fehler verschwindet jedenfalls gegen denjenigen, welcher aus der Beobachtung herrührt.

Die nach der schon früher auseinandergesetzten Methode angestellte und berechnete Beobachtung ergab die folgenden Resultate.

1) bei gleichgerichteten Zweigen:

Intensität des induzierenden Stromes in Skalenteilen der Tangentenbussole	Gröſse des einfachen Extrastromes in Skalenteilen des Galvanometers	Intensität des induzierenden Stromes in Skalenteilen der Tangentenbussole	Gröſse des einfachen Extrastromes in Skalenteilen des Galvanometers
152,7	1,121	78,9	0,561
75,7	0,551	78,4	0,548
93,6	0,673	74,2	0,549
116,4	0,831	145,2	1,065
67,6	0,478	—	—

Durch Reduktion auf die Intensität 100 Skalenteile werden die Werte erhalten:

7,43 7,28 7,20 7,14 7,07 7,11 7,01 7,37 7,33 im Mittel 7,213

mit einem mittleren Fehler von 0,137 oder $\frac{1}{50}$ des ganzen Wertes.

2) bei entgegengesetzt durchströmten Zweigen:

Intensität des induzierenden Stromes	Intensität des Extrastromes	Intensität des induzierenden Stromes	Intensität des Extrastromes
152,7	0,2088	150,5	0,2025
152,7	0,2051	116,1	0,1443
140,1	0,1872	288,9	0,3992
139,0	0,1817	—	—

Durch Reduktion auf die Intensität 100 werden die Werte erhalten:

0,1367 0,1344 0,1337 0,1307 0,1345 0,1243 0,1382.

Die sechste Beobachtung, deren groſse Abweichung von den übrigen offenbar von einem besonderen Fehler herrührt, soll verworfen werden, die übrigen geben im Mittel 0,1348 mit

Digitized by Google

einem mittleren Fehler von 0,0028 oder ca. $\frac{1}{60}$ des ganzen Wertes. Das beobachtete Verhältnis der beiden Extraströme:

$$= \frac{7{,}213}{0{,}1348} = 5{,}352$$

weicht von dem berechneten $= 5{,}330$ nur um $\frac{1}{250}$ ab, die Abweichung liegt also durchaus innerhalb der unvermeidlichen Fehler der Beobachtung.

Es mufs bemerkt werden, dafs in die oben gegebenen Resultate alle Beobachtungen ohne Unterschied aufgenommen worden sind.

Zweite Versuchsreihe mit geradlinigen Drähten.

Noch eine zweite Versuchsreihe mit geradlinigen Drähten wurde angestellt, welche sich von der vorigen nur dadurch unterschied, dafs an Stelle des zusammengefalteten Neusilberwiderstandes ein Widerstand von Bunsen'scher Gaskohle angewandt wurde, und dafs auch für das stromgebende Drahtsystem ein stärkerer Kupferdraht gewählt wurde. Es sollte diese Abänderung die bei den vorigen Versuchen vorliegende Gefahr beseitigen, dafs während der Umschaltung selbst eintretende kleine Temperaturschwankungen eine Abänderung der scheinbaren Gröfse des Extrastromes hervorrufen, also etwa eine Abweichung desselben vom Potentialgesetz verdecken könnten. Um derartige und ähnliche Störungen bemerkbarer zu machen, wurden die Extraströme bei einer möglichst grofsen Zahl verschiedener Intensitäten des induzierenden Stromes beobachtet. Die Abweichung der Integralstärke der Extraströme von der Proportionalität mit diesen Intensitäten mufste ihre Ursache notwendig in solchen Störungen haben.

Der Durchmesser des angewandten Drahtes war 0,6482 mm, der Abstand der beiden Zweige 3,441 mm. Das Potential wurde genau wie oben berechnet, und es wurde gefunden:

$$2P' = 920956\,\text{mm}, \qquad 2P = 185252\,\text{mm}.$$

Das Potential des entgegenwirkenden Kohlenwiderstandes war:

$$2p = 2997\,\text{mm},$$

Digitized by Google

also das berechnete Verhältnis der Extraströme:

$$\frac{P'-p}{P-p} = 5{,}0367 \ .$$

Die Versuche gaben die folgenden Resultate:

Nr.	Intensität des induzierenden Stromes	Intensität der Extraströme		auf Intensität 100 reduziert	
		bei entgegengesetzten Zweigen	bei gleichgerichteten Zweigen	bei entgegengesetzten Zweigen	bei gleichgerichteten Zweigen
1.	11,3	0,0275	0,1225	0,2434	1,084
2.	17,2	0,0492	0,1940	0,2860	1,127
3.	18,8	0,0478	0,2082	0,2542	1,107
4.	20,9	0,0582	0,2430	0,2784	1,162
5.	24,1	0,0628	0,2775	0,2606	1,152
6.	27,7	0,0700	0,3235	0,2527	1,167
7.	33,3	0,0857	0,3792	0,2537	1,138
8.	37,2	0,0957	0,4015	0,2572	1,080
9.	47,7	0,1057	0,5243	0,2216	1,099
10.	57,8	0,1330	—	0,2301	—
11.	66,2	0,1478	0,7357	0,2234	1,112
12.	72,7	0,1555	—	0,2139	—
13.	88,7	0,2135	—	0,2135	—
14.	108,6	0,2432	—	0,2240	—
15.	108,7	0,2945	1,1425	0,2158	1,051
16.	141,3	0,3005	1,1825	0,2128	1,049
17.	172,6	0,3872	—	0,2276	—
18.	192,1	0,4105	—	0,2138	—

Als Mittelwert des Extrastromes bei gleichgerichteten Zweigen und Intensität 100 wird erhalten 1,111 mit dem mittleren Fehler 0,038. Hieraus und aus dem berechneten Verhältnis würde für die Gröfse des Extrastromes bei entgegengesetzt durchströmten Zweigen folgen 0,2203. Vergleicht man diesen Wert mit den beobachteten, so sieht man, dafs die bei ganz schwachen Strömen beobachteten Werte bedeutend gröfser sind; und auch der Mittelwert sämtlicher Beobachtungen, nämlich 0,2379, weicht von der Rechnung ab. Indessen erkennt man auch, dafs aus dieser Abweichung ein Schlufs in Bezug auf eine Masse in keiner Weise berechtigt wäre, da sie nur bei denjenigen Beobachtungen stattfindet, welche wegen der Kleinheit der Wirkungen schon sehr unsicher waren, auch unter sich schlecht übereinstimmen. Benutzt man nur die bessere Hälfte der Versuche, von Nr. 8 an, so erhält man für den Extrastrom aus entgegengesetzten

Digitized by Google

Zweigen den Mittelwert 0,2197 mit dem mittleren Fehler 0,0060, und für das Verhältnis der beiden Extraströme 5,054, einen Wert, welcher von dem berechneten 5,037 um eine Gröfse abweicht, die vollständig innerhalb der unvermeidlichen Beobachtungsfehler liegt. Die Abweichung der kleineren beobachteten Werte läfst sich leicht und auf verschiedene Weise auf thermische, magnetische oder diamagnetische Ursachen zurückführen, deren Wirkung nicht der Intensität proportional wächst, sondern schnell ein Maximum erreicht.

Rekapitulation der Resultate und Folgerungen.

Um aus den Versuchen eine obere Grenze für die Gröfse μ, deren Bedeutung in der Einleitung festgestellt wurde, abzuleiten, mögen die Resultate kurz rekapituliert werden.

Wir gehen aus von den Formeln:

$$m = P\left\{\frac{J}{J'}\frac{P'}{P} - 1\right\} , \qquad \mu = \frac{qm}{l} .$$

Die hierin vorkommenden Gröfsen hatten bei den verschiedenen Versuchen die folgenden Werte.

1) Bei den Versuchen mit den Spiralen war:

$$l = 130032 \qquad P' = 37840000$$
$$q = 0{,}6793 \qquad J = 1{,}1476$$
$$P = 89250 \qquad J' = 238{,}67 .$$

Der wahrscheinliche Fehler der einzelnen Angaben läfst sich nicht genau feststellen, da die zugehörigen Messungen und die dabei vorhandenen Fehlerquellen sehr mannigfaltig waren, jedoch ist sicher bei keiner Messung ein Fehler begangen, der gröfser als $\frac{1}{20}$ des Wertes war, und auch die Fehler der Rechnung, durch welche P bestimmt wurde, können nach dem Obigen diese Gröfse nicht erreichen. Nehmen wir daher an, dafs die Gröfse $JP'/J'P$, welche sich aus den Beobachtungen zusammensetzt, um $\frac{1}{20}$ ihres Wertes falsch sei, in dem Sinne, dafs eine vorhandene Wirkung der Masse dadurch verdeckt wird, so werden wir eine Grenze erhalten, deren Überschreitung sehr unwahrscheinlich ist, nämlich:

Digitized by Google

$$m < 89250\left\{\frac{J}{J'}\,\frac{P'}{2P}\cdot\tfrac{21}{20}-1\right\}^{1}),$$

$$m < 6668\ , \qquad \mu < 0{,}0348\,\text{mm}^2\ .$$

2) Eine engere Grenze erhalten wir aus den ersten Versuchen mit geradlinigen Drähten. Hier war:

$$l = 35892\ , \qquad P = 89980\ , \qquad J' = 0{,}7213\ ,$$

$$q = 0{,}1323\ , \qquad \frac{P'}{P} = 5{,}330\ , \qquad J = 0{,}1348\ .$$

Die berechneten Potentiale können als exakt richtig angenommen werden, da ihr Fehler wohl kaum $\frac{1}{100}$ erreicht. Für die Gröfsen J und J' können die wahrscheinlichsten Fehler aus den Versuchen abgeleitet werden, sie werden erhalten:

$$\text{für } J' = 0{,}0092\ , \qquad \text{für } J = 0{,}0019\ .$$

Nehmen wir hier an, dafs beide Intensitäten um die volle Gröfse des wahrscheinlichsten Fehlers falsch gemessen seien, und zwar beide in ungünstigem Sinne, also J zu klein, J' zu grofs, so erhalten wir:

$$m < 89980\left\{5{,}330\cdot\frac{0{,}1367}{0{,}7121}-1\right\}\ ,$$

$$m < 2085\ , \qquad \mu < 0{,}0077\,\text{mm}^2\ .$$

3) Bei der zweiten Versuchsreihe mit geradlinigen Drähten war:

$$l = 35892\ , \qquad P = 92620\ , \qquad J' = 1{,}111\ ,$$

$$q = 0{,}3300\ , \qquad \frac{P'}{P} = 5{,}0367\ , \qquad J = 0{,}2196\ .$$

Bei der Bestimmung von J sind nur die Beobachtungen von Nr. 8 an benutzt. Die sich aus den Versuchen ergebenden wahrscheinlichsten Fehler sind:

$$\text{für } J' = 0{,}026\ , \qquad \text{für } J = 0{,}0040\ .$$

Die gleiche Annahme wie oben ergiebt hier:

$$m < 92620\left\{5{,}0367\cdot\frac{0{,}2236}{1{,}085}-1\right\},$$

$$m < 3521\ , \qquad \mu < 0{,}0323\,\text{mm}^2\ .$$

---

[1]) Der Bruch P'/P ist hier durch $P'/2P$ zu ersetzen, da P' das Potential eines Leiters auf einen anderen, P ein Eigenpotential bezeichnet.

Digitized by Google

Die Grenze wird hier nicht so eng erhalten wie bei den vorigen Versuchen, hauptsächlich aus dem Grunde, weil dort q, der Querschnitt des Drahtes, kleiner, also die Bedingung für das Bemerkbarwerden der Masse günstiger war.

Unter Benutzung der ersten Versuchsreihe mit geradlinigen Drähten, als der besten, erhalten wir also das Resultat:

Die kinetische Energie der elektrischen Strömung in einem Kubikmillimeter eines kupfernen Leiters, welcher von einem Strome von der elektromagnetischen Dichtigkeit 1 durchflossen wird, beträgt weniger als:

0,008 Milligrammmillimeter.

Da die kinetische Energie gleich der halben Masse multipliziert mit dem Quadrate der Geschwindigkeit ist, so ist die Masse der positiven Elektricität in 1 mm³:

$$< \frac{0{,}008\ \text{mg}}{v^2},$$

ist beispielsweise $v = 1$ mm, 10 mm etc., so ist die Masse der positiven Elektricität $< 0{,}008$ mg, $< 0{,}00008$ mg etc.

Es mufs jedoch die Bemerkung gemacht werden, dafs möglicherweise die kinetische Energie der Strömung die hier gesteckten Grenzen überschreitet, ohne dafs deshalb die Beobachtungen einen Fehler in sich schlössen. Verhält sich nämlich die Leitungsfähigkeit der Metalle wie die Dichtigkeit der in ihnen enthaltenen Elektricität, so müssen die in zwei Drähten von gleichem Widerstand von der Trägheit herrührenden elektromotorischen Kräfte gleich sein, welches auch immer Material, Länge und Querschnitt der Drähte ist. Es mufsten in diesem Falle auch die aus den vier Zweigen der Brücke herrührenden Extraströme, soweit sie ihre Entstehung einer Masse verdankten, gleich sein und sich daher aufheben. Nur unter der Annahme, dafs obige Proportionalität nicht stattfindet, sondern dafs die Dichtigkeit der Elektricität in den verschiedenen Leitern wenigstens annähernd die gleiche sei, war es erlaubt, von der Wirkung der in den kurzen Neusilber- und Kohlenzweigen bewegten Masse abzusehen, wie wir es gethan haben.

Umgekehrt, gelänge es, auf anderem Wege nachzuweisen, dafs die lebendige Kraft der elektrischen Strömung die oben

Digitized by Google

aufgestellte Grenze überschreitet, so würden die obigen Versuche den Beweis liefern, dafs sich die Dichtigkeiten der Elektricität in den benutzten Materien verhalten wie deren Leitungsfähigkeiten.

Eine Entscheidung über die vorgeführten Möglichkeiten ist der Theorie nach zu erlangen durch dynamometrische Versuche oder durch die Beobachtung des zeitlichen Verlaufes der Induktions- und Extraströme; praktisch aber versprechen alle Versuchsanordnungen, die ich ausfindig zu machen im stande war, nur dann Aussicht auf Erfolg, wenn die träge Masse die hier festgesetzte Grenze um viele tausendmale überschreitet.

Zum Schlusse will ich, unter Ausschlufs der zuletzt besprochenen Annahme, die gefundene Grenze für die Gröfse μ in die Rechnungen einsetzen, welche von Hrn. Geheimrat Helmholtz im 72. Bande des Borchardt'schen Journals[1]) ausgeführt sind. Es wird dort gezeigt, dafs unter gewissen, näher bestimmten Voraussetzungen und unter Annahme des Weber'schen Gesetzes in einer leitenden Kugel vom Radius $\mathfrak{R}$ gewisse Strömungsformen, die durch eine Ordnungszahl a gegeben sind, dann instabil werden, wenn nach unserer Bezeichnungsweise:

$$\mathfrak{R} > a\sqrt{\frac{\mu\pi}{2}} \text{ ist.}^{2})$$

Hieraus und aus der für μ gefundenen Grenze $\mu = 0{,}008\,\text{mm}^2$ ergiebt sich, dafs unter den gemachten Voraussetzungen die erste und Grundströmung schon in einer Kugel von 0,11 mm Radius instabil werden würde, und dafs in einer Kugel von 1 cm Radius schon die ersten 90 Teilströmungen, also nahezu die gesamte Strömung ins Unendliche würde wachsen können.

Extraströme in Eisendrähten.

Ist der durchflossene Draht fähig, magnetische Polarität anzunehmen, so wird dieser Umstand eine ähnliche Vermeh-

[1]) [Wiss. Abh. Bd. I. S. 589.]

[2]) Unsere Gröfse μ ist in der dort benutzten Bezeichnungsweise ausgedrückt gleich $\mu/2A^2$.

Digitized by Google

rung des Eigenpotentiales zur Folge haben, wie eine etwa vorhandene träge Masse der Elektricität; die Gröfse der Polarisationsfähigkeit wird sich daher nach derselben Methode bestimmen lassen, welche wir zum Nachweis einer trägen Masse in Anwendung zu bringen gesucht haben.

Teils um mich von der Brauchbarkeit der Methode zu diesem Zwecke zu überzeugen, teils um eine Schätzung darüber zu erhalten, wie weit die magnetischen Eigenschaften anderer Metalle zu Störungen Anlafs geben könnten, stellte ich einige Versuche mit Eisendrähten an. In denselben war der zu untersuchende Widerstand der Brücke aus einem weichen Eisendrahte von 0,66 mm Durchmesser und 14070 mm Gesamtlänge gebildet, der, ähnlich wie früher der Kupferdraht, aus zwei Zweigen bestand, welche in zwei verschiedenen Weisen geschaltet werden konnten. Die Form des Drahtes bestand wieder aus Rechtecken, so dafs für beide Schaltungen sich die Eigenpotentiale der Vorrichtung genau berechnen liefsen. Aus den bei diesen beiden Potentialen erhaltenen Werten des Extrastromes mufste sich der Theorie nach schon die Vermehrung des Eigenpotentiales durch den Magnetismus berechnen lassen, in Wirklichkeit zeigte sich dies nicht thunlich, da die Wirkung des Magnetismus nicht klein, sondern sehr grofs gegen die reine Induktionswirkung war. Es wurde deshalb an Stelle des Eisendrahtes ein Zweig einer der früher erwähnten Spiralen mit dem nötigen Ballastwiderstande in die Brücke eingeschaltet und mit dem Extrastrome, welchen dies bekannte Potential hervorbrachte, der Extrastrom aus dem Eisendrahte verglichen.

Die Beobachtungen wurden nach den früher besprochenen Methoden angestellt; ihre Details bieten kein Interesse, sie gaben aber die Daten an die Hand, um in absolutem Mafse die in dem Eisendrahte wirkenden magnetisierenden Kräfte sowohl als auch die erreichten Polarisationen zu bestimmen. Die Resultate sind in folgender kleinen Tabelle zusammengestellt. Die erste Spalte giebt in absolutem Mafse den Wert der magnetisierenden Kraft K an der Mantelfläche des cylindrischen Drahtes (von wo aus sie gegen die Axe zu abnimmt, proportional dem Abstande von der Axe); die zweite Spalte

Digitized by Google

giebt die aus den zugehörigen Beobachtungen berechneten Werte der sogenannten Polarisationskonstanten θ:

K	θ	K	θ
0,96	8,12	1,98	8,83
1,17	8,42	2,94	9,67
1,47	9,02	3,12	9,67
1,62	8,92	3,99	9,96
1,74	8,65	7,20	11,60

Diese Werte von K und θ können selbstverständlich nur nahezu als zusammengehörige Werte bezeichnet werden. Abgesehen von manchen Unregelmäfsigkeiten zeigt sich, dafs innerhalb der vorliegenden Grenzen θ wächst mit K, ein Verhalten, welches unter anderen Umständen schon häufig beobachtet ist. Die Beobachtungen auf gröfsere Stromstärken auszudehnen, war wegen der zu beträchtlichen Wärmeentwickelung im Eisendrahte nicht möglich.

Digitized by Google

2. Über die Induktion in rotierenden Kugeln.

Inaugural-Dissertation. Berlin, 15. März 1880.

Die Wechselwirkungen zwischen Magneten und rotierenden Metallmassen, welche ARAGO entdeckt hatte, wurden zuerst von FARADAY als Erscheinungen elektrodynamischer Anziehung aufgefafst und auf Ströme zurückgeführt, welche in den Metallmassen durch die Magnete induziert werden. Es gelang FARADAY, das Vorhandensein derartiger Ströme nachzuweisen, und die Natur des Phänomens als einer Induktionserscheinung aufser Zweifel zu setzen.

Der erste Versuch, die inzwischen ausgebildete Theorie auf einige hierher gehörige Erscheinungen anzuwenden, wurde im Jahre 1853 von FELICI gemacht. Es gelang demselben unter vereinfachten Bedingungen angenäherte Lösungen zu erhalten, die den Beobachtungen für das Erste hinreichend entsprachen.

Viel weiter ging im Jahre 1864 Herr JOCHMANN. Derselbe leitete, vom WEBER'schen Gesetze ausgehend, die vollständigen Differentialgleichungen des Problems ab, und integrierte dieselben für den Fall, dafs der rotierende Körper eine unendlich ausgedehnte ebene Platte oder eine Kugel sei. Seine Rechnungen fanden sich in schönster Übereinstimmung mit den Beobachtungen. Freilich mufste er die vereinfachende Annahme machen, dafs die Rotationsgeschwindigkeit sehr klein sei, den Einflufs der Selbstinduktion vermochte er nicht zu bestimmen.

Endlich hat im Jahre 1872 Herr MAXWELL in sehr eleganter Weise die Theorie der Induktion in einer unendlich ausgedehnten, sehr dünnen Platte gegeben und gezeigt, wie sich dieselbe auf die ARAGO'sche Scheibe anwenden läfst.

Digitized by Google

In der vorliegenden Arbeit ist das Problem vollständig gelöst für den Fall, dafs der betrachtete Körper eine um einen Durchmesser rotierende Kugel oder Hohlkugel sei. Die induzierenden Magnete können dabei im äufseren, oder, bei Hohlkugeln, im inneren Raum liegen. Auch auf den Fall ist die Lösung ausgedehnt, dafs die Masse der Kugel magnetische Polarität anzunehmen vermag. Offenbar umschliefst dies Problem die früher gelösten als spezielle Fälle.

Die erhaltenen Resultate habe ich durch einige Zeichnungen zu veranschaulichen gesucht.

---

§ 1. Festsetzung der Bezeichnungen.

In diesem Paragraphen sollen die Bezeichnungen festgesetzt, und einige bekannte Formeln, die ich beständig gebrauchen werde, zusammengestellt werden.

Koordinaten. 1. Das angewandte Koordinatensystem ist das in Fig. 6 dargestellte. Die als positiv geltenden Drehungsrichtungen sind in die Figur eingezeichnet. Die z Axe falle mit der Rotationsaxe zusammen. Als Polarkoordinaten mögen verwendet werden ϱ, ω, θ. ω entspreche der geographischen Länge, sei 0 in der xz Ebene bei positiven x und wachse im Sinne der positiven Drehung, θ entspreche dem Komplement der geographischen Breite und sei 0 in der positiven z Axe. Gelegentlich möge die Bezeichnung benutzt werden:

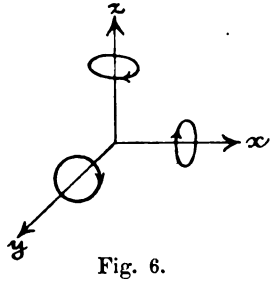


Fig. 6.

$$x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \omega_z} = \frac{\partial}{\partial \omega}$$

$$z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \omega_y}$$

$$y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \omega_x} \quad ,$$

Digitized by Google

ferner werde der Differentialquotient $\partial/\partial\omega$ nach LAGRANGE's Weise bezeichnet, also z. B.:

$$\frac{\partial\chi}{\partial\omega} = \chi' \quad .$$

Bezeichnung der elektrischen Grösen.

2. Die Rechnungen seien in elektromagnetischem Mafse geführt. Im übrigen seien die Bezeichnungen für die elektrischen Grösen diejenigen, welche von Herrn Geheimrat HELMHOLTZ im 72. Bande des BORCHARDT'schen Journales eingeführt sind.[1]) Es seien also:

$$u, v, w, \frac{\mathrm{mgr}^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{mm}^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{sec}}$$

die Dichtigkeiten der Strömung nach den x, y, z;

$$U, V, W, \frac{\mathrm{mm}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{mgr}^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{sec}}$$

die entsprechenden Komponenten des Vektorpotentiales;

$$\varphi \frac{\mathrm{mm}^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{mgr}^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{sec}^2}$$ [2])

die Potentialfunktion der freien Elektricität;

$$\varkappa \frac{\mathrm{mm}^2}{\mathrm{sec}}$$

der spezifische Widerstand des Materiales. Der spezifische Widerstand einer Fläche von verschwindender Dicke δ, nämlich $\varkappa/\delta$, werde, wenn er als endlich betrachtet wird, bezeichnet mit

$$k \frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{sec}} \quad .$$

Es seien ferner:

$$\lambda, \mu, \nu, \frac{\mathrm{mgr}^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{mm}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{sec}}$$

die Komponenten einer magnetischen Polarisation;

$$L, M, N, \frac{\mathrm{mgr}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{mm}^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{sec}}$$

---

[1]) [Wiss. Abh. Bd. 1. S. 545.]

[2]) Dies ist nicht elektromagnetisches Mafs. In letzterem gemessen ist die Potentialfunktion der freien Elektricität $\varphi_m = \varphi A^2$, wenn $1/A$ die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet. Obige Einheit vermeidet den lästigen Faktor $1/A^2$.

Digitized by Google

die Potentiale der $\lambda\,\mu\,\nu$, letztere als Massen gedacht;

$$\theta \quad (0)$$

die magnetische Polarisationskonstante;

$$\chi\,\frac{\mathrm{mm}^{\frac{1}{2}}\mathrm{mgr}^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{sec}}$$

das magnetische Potential; jedoch soll nur derjenige Teil desselben so bezeichnet werden, welcher thatsächlich von Magneten herrührt, das magnetische Potential der induzierten Strömungen sei

$$\Omega\,\frac{\mathrm{mm}^{\frac{1}{2}}\mathrm{mgr}^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{sec}}\quad .$$

Ω verliert seine Bedeutung in der Masse der Hohlkugel, kann also durch dieselbe nicht fortgesetzt werden, ist also eindeutig im innern und äussern Raum.

Mit

$$\psi\,\frac{\mathrm{mm}^{\frac{1}{2}}\mathrm{mgr}^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{sec}}$$

werde die Strömungsfunktion in einer unendlich dünnen Hohlkugel bezeichnet. Um jede Zweideutigkeit im Bezug auf die Vorzeichen zu vermeiden, ist hier die Bestimmung für ψ: Wächst bei Durchlaufung einer Strecke ds ψ um $d\psi$, so ist $d\psi$ die den zurückgelegten Weg von der linken zur rechten Seite in der Zeiteinheit durchströmende positive Elektricitätsmenge. Bei Durchlaufung des Weges sind die Füsse gegen den Mittelpunkt der Kugel, das Angesicht gegen das Ziel gewandt zu denken.

Da wir es im folgenden nur mit Strömungen zu thun haben, die in konzentrischen Kugelschalen um den Nullpunkt erfolgen, so können und wollen wir

$$\psi\,\frac{\mathrm{mgr}^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{mm}^{\frac{1}{2}}\mathrm{sec}}$$

etwas allgemeiner definieren als eine Funktion von ϱ, θ, ω, derart, daſs

$$da\,.\,\psi_{(\varrho=a)}$$

die Strömungsfunktion der Schicht zwischen $\varrho=a$ und $\varrho=a+da$ darstellt.

Digitized by Google

Den angeführten Gröfsen sind zur Bequemlichkeit ihre Einheiten beigefügt.

Mafse der betrachteten Kugel.

3. Der äufsere Radius der betrachteten Hohlkugel sei R, der innere r. Die Drehungsgeschwindigkeit der Kugel sei ω.

Entwickelung nach Kugelfunktionen.

4. Wird eine Funktion χ, die in einem beliebigen Raum der Gleichung $\Delta\chi = 0$ genügt, nach Kugelfunktionen entwickelt, so soll χ_n dasjenige Glied bezeichnen, welches den Faktor ϱ^n enthält, und diese Bezeichnung soll, wenn nicht näheres bestimmt wird, auch negative n umfassen.

Bei weiterer Zerlegung von χ_n gelte die Bezeichnung: für positive n:

$$\chi_n = \varrho^n Y_n \quad ,$$

für negative n:

$$\chi_n = \varrho^n Y_{-n-1} \quad ,$$

$$Y_n = \sum_0^n{}_i (A_{ni} \cos i\omega + B_{ni} \sin i\omega) P_{ni}(\theta) \quad .$$

Für alle n gelten die Gleichungen:

$$\Delta\chi_n = 0 \quad ,$$

$$x\frac{\partial\chi_n}{\partial x} + y\frac{\partial\chi_n}{\partial y} + z\frac{\partial\chi_n}{\partial z} = n\chi_n \quad .$$

Die $m$ten Differentialquotienten von χ_n nach den xyz sind Kugelfunktionen $(n-m)$ter Ordnung, sofern nicht ein vorangegangener der nullten Ordnung wird. Die Ausdrücke

$$\frac{\partial\chi_n}{\partial\omega_x}, \quad \frac{\partial\chi_n}{\partial\omega_y}, \quad \frac{\partial\chi_n}{\partial\omega_z}$$

sind Kugelfunktionen $n$ter Ordnung.

Ferner ist:

$$\Delta(\varrho^m Y_n) = (m-n)(m+n+1)\varrho^{m-2} Y_n \quad ,$$

$$x\frac{\partial(\varrho^m Y_n)}{\partial x} + y\frac{\partial(\varrho^m Y_n)}{\partial y} + z\frac{\partial(\varrho^m Y_n)}{\partial z} = m\varrho^m Y_n \quad ,$$

$$\frac{\partial(\varrho^m Y_n)}{\partial\varrho} = \frac{m}{\varrho}(\varrho^m Y_n) \quad .$$

Digitized by Google

Sätze über die Strömung in Kugelschalen.

5. Es sei ψ die Strömungsfunktion einer Kugelschale vom Radius R, es sei

$$\Psi = \int \frac{\psi ds}{r}$$

das Potential einer Masse, welche auf der Kugelschale mit der Dichtigkeit ψ verbreitet ist, so ist das Potential der Strömung:

$$\Omega = -\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \varrho}(\Psi_\varrho) \quad ,$$

und die Grössen UVW sind:

$$U = \frac{y}{R}\frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{z}{R}\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \omega_x}\Psi$$

$$V = \frac{z}{R}\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{x}{R}\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \omega_y}\Psi$$

$$W = \frac{x}{R}\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{y}{R}\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \omega_z}\Psi \quad .$$

Ist Ψ eine homogene Funktion $n$ten Grades in x, y, z, so ist:

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{n+1}{R}\frac{\partial}{\partial z}\Psi$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{n+1}{R}\frac{\partial}{\partial y}\Psi$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{n+1}{R}\frac{\partial}{\partial x}\Psi \quad .$$

Immer ist:

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial \Omega}{\partial z}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial \Omega}{\partial x} \quad .$$

Man findet diese Formeln entwickelt in MAXWELL's Treatise

Digitized by Google

on electricity, Vol. II, p. 276[1]). Die Vorzeichen sind dort teilweise andere, es liegt dies daran, dafs dort nicht unser Koordinatensystem, sondern das symmetrische angewandt ist. Das hier benutzte Koordinatensystem ist dasjenige, auf welches sich die HELMHOLTZ'schen Formeln beziehen.

Formeln für die elektromotorischen Kräfte.

6. Für die elektromotorischen Kräfte, welche die als unveränderlich vorausgesetzten Komponenten des Vektorpotentiales UVW in dem mit den Geschwindigkeitskomponenten α, β, γ bewegten Elemente hervorrufen, sind die Formen angenommen:

$$\mathfrak{X} = \beta\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) - \gamma\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right)$$

$$\mathfrak{Y} = \gamma\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) - \alpha\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

$$\mathfrak{Z} = \alpha\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) - \beta\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) .$$

Es sind dies die von Herrn JOCHMANN aufgestellten Formen. Die Abänderung, welche die Formeln des Potentialgesetzes an den Resultaten hervorrufen würden, sind in § 8 besprochen.

Wirken aufser den Strömungen uvw Magnete, $\lambda\mu\nu$, so ist für diesen Teil der Induktion in obigen Formeln zu ersetzen:

$$U \text{ durch } \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} ,$$

$$V \text{ durch } \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} ,$$

$$W \text{ durch } \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} .$$

Die so erhaltenen Formeln gelten auch dann, wenn sich die Magnete im Innern der rotierenden Masse befinden. Befinden sich die Magnete nur aufserhalb der Masse, so wird, da in der Masse

$$\Delta L = 0 , \quad \Delta M = 0 , \quad \Delta N = 0 ,$$

[1]) [2. edit: p. 280.]

Digitized by Google

$$\mathfrak{X} = \beta \frac{\partial \chi}{\partial z} - \gamma \frac{\partial \chi}{\partial y}$$

$$\mathfrak{Y} = \gamma \frac{\partial \chi}{\partial x} - \alpha \frac{\partial \chi}{\partial z}$$

$$\mathfrak{Z} = \alpha \frac{\partial \chi}{\partial y} - \beta \frac{\partial \chi}{\partial x} \quad .$$

Für die Elemente unserer Kugel ist

$$\alpha = -\omega y \quad , \quad \beta = \omega x \quad , \quad \gamma = 0 \quad .$$

§ 2. Lösung bei Vernachlässigung der Selbstinduktion.

In diesem Paragraphen soll das Problem für den Fall gelöst werden, dafs von der Wirkung der Selbstinduktion abgesehen werden kann. Für die Strömungen $u\,v\,w$ bestehen die Gleichungen:

$$\varkappa u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathfrak{X}$$

$$\varkappa v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathfrak{Y}$$

$$\varkappa w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mathfrak{Z}\ ^{1}) \ ;$$

ferner, da die Strömung stationär ist, im Innern:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad ,$$

und für $\varrho = R$ und $\varrho = r$:

$$ux + vy + wz = 0 \quad .$$

Hieraus ergeben sich für φ die Bedingungen:
im Innern:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} \quad ,$$

und an der Oberfläche:

$$\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = x\mathfrak{X} + y\mathfrak{Y} + z\mathfrak{Z} \quad ,$$

welche φ bis auf eine additive Konstante bestimmen.

---

[1]) Unter Annahme der hier für φ gebrauchten Einheiten.

Digitized by Google

Das Potential der im äufseren und inneren Raum befindlichen Magneten sei nach Kugelfunktionen entwickelt:

$$\chi = \sum_{-\infty}^{+\infty n} \chi_n \quad .$$

Wir betrachten jedes Glied für sich und setzen daher das äufsere Potential $= \chi_n$.

Dann ist

$$\mathfrak{X} = \omega x \frac{\partial \chi_n}{\partial z}$$

$$\mathfrak{Y} = \omega y \frac{\partial \chi_n}{\partial z}$$

$$\mathfrak{Z} = -\omega y \frac{\partial \chi_n}{\partial y} - \omega x \frac{\partial \chi_n}{\partial x} = \omega z \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - \omega n \chi_n \quad .$$

Bestimmung des elektrischen Potentiales.

Daraus folgen für φ die Bedingungen:
In der Masse der Hohlkugel:

$$\Delta \varphi = 2\omega \frac{\partial \chi_n}{\partial z} \quad , \qquad \text{a)}$$

für $\varrho = r$ und $\varrho = R$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = \frac{\omega}{\varrho} \left(\varrho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n \right) \quad . \qquad \text{b)}$$

Eine Lösung dieser Gleichungen ist:

$$\varphi = \frac{\omega}{n+1} \left(\varrho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n \right) \quad .$$

Denn es ist

$$\Delta \left(\varrho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n \right)$$

$$= 2(2n+1) \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - 2n \frac{\partial \chi_n}{\partial z} \qquad (\S\, 1{,}4)$$

$$= 2(n+1) \frac{\partial \chi_n}{\partial z} \quad ,$$

so dafs die Gleichung für das Innere befriedigt ist. Ferner ist φ ein Produkt aus ϱ^{n+1} und einer Funktion der Winkel θ und ω, daraus ergiebt sich leicht, dafs φ der Grenzgleichung genügt.

Digitized by Google

Der Wert der Konstanten, welche man zu obigem Ausdruck zu addieren hat, um die allgemeine Lösung zu erhalten, hängt in jedem Falle von den elektrostatischen Einflüssen ab, denen die Kugel ausgesetzt ist. Es kann der Kugel in jedem Falle so viel freie Elektricität zugeführt werden, dafs die Konstante gleich Null wird, und es sei dies in der Folge vorausgesetzt.

Bestimmung von u, v, w.

Aus φ folgt unmittelbar:

$$u = \frac{\omega}{\varkappa}\left\{-\frac{1}{n+1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho^2\frac{\partial\chi_n}{\partial z} - nz\chi_n\right) + x\frac{\partial\chi_n}{\partial z}\right\}$$

$$v = \frac{\omega}{\varkappa}\left\{-\frac{1}{n+1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\varrho^2\frac{\partial\chi_n}{\partial z} - nz\chi_n\right) + y\frac{\partial\chi_n}{\partial z}\right\}$$

$$w = \frac{\omega}{\varkappa}\left\{-\frac{1}{n+1}\frac{\partial}{\partial z}\left(\varrho^2\frac{\partial\chi_n}{\partial z} - nz\chi_n\right) + z\frac{\partial\chi_n}{\partial z} - n\chi_n\right\} \quad .$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen mit $x\,y\,z$ und addieren, so folgt

$$ux + vy + wz = 0 \quad .$$

Die Strömung ist also überall senkrecht zum Radius, sie findet in konzentrischen Kugelschalen um den Nullpunkt statt. Es ist dies eine Folge des Umstandes, dafs Gleichung b) nicht nur an der Oberfläche, sondern in der ganzen Masse erfüllt ist.

Weiter findet man:

$$\Delta u = \frac{\omega}{\varkappa}\left\{-2\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial z} + 2\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial z}\right\} = 0$$

$$\Delta v = 0$$

$$\Delta w = 0, \quad \text{da auch} \quad \Delta\chi_n = 0 \quad .$$

Uebrigens sind $u\,v\,w$ homogene Funktionen $n$ten Grades in $x\,y\,z$; es sind also $u\,v\,w$ durch Kugelfunktionen $n$ten Grades dargestellt. Wir werden für $u\,v\,w$ alsbald einfachere Formen finden.

Aufsuchung der Funktion Ψ.

Da die Strömungen in den konzentrischen Kugelschichten einander ähnlich sind, so sind sie auch ähnlich denjenigen, welche in einer unendlich dünnen Hohlkugel entstehen; wir wenden uns daher zunächst zu einer solchen und bestimmen den Wert der Integrale $U\,V\,W$, und zwar für den inneren

Digitized by Google

Raum, wenn n positiv ist; für den äufseren Raum, wenn n negativ ist. Nur der erstere Fall soll durchgerechnet werden. $\varkappa$ ersetzen wir durch k. Für UVW gelten die Bedingungen:

$$\Delta U = 0 \ , \quad \Delta V = 0 \ , \quad \Delta W = 0$$

im ganzen Raum, an der Kugelschale:

$$\frac{\partial U_a}{\partial \varrho} - \frac{\partial U_i}{\partial \varrho} = -4\pi u \ ,$$

entsprechend für V und W; aufserdem die gewöhnlichen Stetigkeitsbedingungen. Allen diesen Bedingungen ist genügt, wenn man setzt:

$$U_i = \frac{4\pi R}{2n+1}\frac{\omega}{k}\left\{-\frac{1}{n+1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho^2\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n\right) + x\frac{\partial \chi_n}{\partial z}\right\}$$

$$V_i = \frac{4\pi R}{2n+1}\frac{\omega}{k}\left\{-\frac{1}{n+1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\varrho^2\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n\right) + y\frac{\partial \chi_n}{\partial z}\right\}$$

$$W_i = \frac{4\pi R}{2n+1}\frac{\omega}{k}\left\{-\frac{1}{n+1}\frac{\partial}{\partial z}\left(\varrho^2\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n\right) + z\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n\right\},$$

$$U_a(\varrho) = \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{2n+1} U_i\left(\frac{1}{\varrho}\right)$$

$$V_a(\varrho) = \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{2n+1} V_i\left(\frac{1}{\varrho}\right)$$

$$W_a(\varrho) = \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{2n+1} W_i\left(\frac{1}{\varrho}\right) \ .$$

Aus diesen UVW wollen wir die magnetisierenden Kräfte im Innern, nämlich

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \text{etc.}$$

berechnen, und dieselben

$$= -\frac{n+1}{R}\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad \text{etc.}$$

setzen, wir erhalten so die Funktion Ψ (§ 1,5). Wir finden nämlich:

Digitized by Google

$$-\frac{4\pi R}{2n+1}\frac{\omega}{k}\frac{\partial}{\partial z}\left(x\frac{\partial \chi_n}{\partial y}-y\frac{\partial \chi_n}{\partial x}\right)=-\frac{n+1}{R}\frac{\partial}{\partial z}\Psi_i$$

$$-\frac{4\pi R}{2n+1}\frac{\omega}{k}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial \chi_n}{\partial y}-y\frac{\partial \chi_n}{\partial x}\right)=-\frac{n+1}{R}\frac{\partial}{\partial x}\Psi_i$$

$$-\frac{4\pi k}{2n+1}\frac{\omega}{k}\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial \chi_n}{\partial y}-y\frac{\partial \chi_n}{\partial x}\right)=-\frac{n+1}{R}\frac{\partial}{\partial y}\Psi_i\ .$$

Also ergiebt sich

$$\Psi_i=\frac{4\pi R^2}{(2n+1)(n+1)}\frac{\omega}{k}\left(x\frac{\partial \chi_n}{\partial y}-y\frac{\partial \chi_n}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{4\pi R^2}{(2n+1)(n+1)}\frac{\omega}{k}\chi_n\ ,$$

und es folgen jetzt die übrigen Attribute der Strömung ohne weiteres aus Ψ. Eine willkürliche Konstante, welche noch zu Ψ hinzugefügt werden kann, ist ohne Belang.

Zusammenstellung der Formeln.

Sonach erhalten wir die Lösung unserer Aufgabe für eine Kugelschale in folgender Form (§ 1,5):

Es sei

$$\chi_n=\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n Y_n \qquad n>0$$

die induzierende Potentialfunktion, dann ist:

$$\Psi_i=\frac{4\pi R^2}{(2n+1)(n+1)}\frac{\omega}{k}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n Y_n'$$

$$\Psi_a=\frac{4\pi R^2}{(2n+1)(n+1)}\frac{\omega}{k}\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} Y_n'$$

$$\psi=\frac{\omega}{k}\frac{R}{n+1}Y_n'$$

$$\Omega_i=-\frac{4\pi R}{2n+1}\frac{\omega}{k}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n Y_n'$$

$$\Omega_a=\frac{4\pi Rn}{(2n+1)(n+1)}\frac{\omega}{k}\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} Y_n'\ .$$

Aus den Relationen

$$U=\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \omega_x}\Psi, \qquad \frac{\partial U_a}{\partial \varrho}-\frac{\partial U_i}{\partial \varrho}=-4\pi u$$

Digitized by Google

und den entsprechenden für V und W erhält man ferner:

$$u = \frac{1}{R}\frac{\partial \psi}{\partial \omega_x} = \frac{1}{n+1}\frac{\omega}{k}\frac{\partial Y_n'}{\partial \omega_x}$$

$$v = \frac{1}{R}\frac{\partial \psi}{\partial \omega_y} = \frac{1}{n+1}\frac{\omega}{k}\frac{\partial Y_n'}{\partial \omega_y}$$

$$w = \frac{1}{R}\frac{\partial \psi}{\partial \omega_z} = \frac{1}{n+1}\frac{\omega}{k}\frac{\partial Y_n'}{\partial \omega_z} \quad .$$

Endlich läfst sich der Ausdruck für das elektrische Potential in der Masse der Hohlkugel umformen. Setzt man für den Augenblick $\varrho' = \varrho \sin\theta$, so ist:

$$\varphi = \frac{\omega}{n+1}\left(\varrho'\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - z\frac{\partial \chi_n}{\partial \varrho'}\right)$$

oder

$$\varphi = -\frac{\omega}{n+1}\varrho \sin\theta \frac{\partial \chi_n}{\partial \theta} \quad ,$$

und in der Kugelschale:

$$\bar{\varphi} = -\frac{\omega R}{n+1}\sin\theta \frac{\partial Y_n}{\partial \theta} \quad .$$

Ganz ähnliche Rechnungen lassen sich durchführen, wenn n negativ ist, sich also die induzierenden Magnete im Innern befinden. Wir erhalten aus denselben das Resultat:

Ist die induzierende Potentialfunktion

$$\chi_n = \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} Y_n \quad ,$$

so ist

$$\psi_i = -\frac{4\pi R^2}{(2n+1)n}\frac{\omega}{k}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n Y_n'$$

$$\psi_a = -\frac{4\pi R^2}{(2n+1)n}\frac{\omega}{k}\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} Y_n'$$

$$\Omega_i = \frac{4\pi R(n+1)}{(2n+1)n}\frac{\omega}{k}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n Y_n'$$

$$\Omega_a = -\frac{4\pi R}{2n+1}\frac{\omega}{k}\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} Y_n'$$

Digitized by Google

$$\psi = -\frac{\omega}{k}\frac{R}{n} Y_n'$$

$$u = -\frac{1}{n}\frac{\omega}{k}\frac{\partial Y_n'}{\partial \omega_x}$$

$$v = -\frac{1}{n}\frac{\omega}{k}\frac{\partial Y_n'}{\partial \omega_y}$$

$$w = -\frac{1}{n}\frac{\omega}{k}\frac{\partial Y_n'}{\partial \omega_z}$$

$$\overline{\varphi} = \frac{\omega}{n} R \sin\theta \frac{\partial Y_n}{\partial \theta} \quad .$$

Von den hier angeführten Gröfsen gehen ψ, u, v, w, q unmittelbar aus den früheren durch Vertauschung von n mit $-n-1$ hervor.

Zu der erhaltenen Lösung mache ich die folgenden Bemerkungen:

1. Rotiert eine Hohlkugel von endlicher Dicke unter dem Einflufs des Potentiales χ_n (n pos. oder neg.), so sind die induzierten Strömungen:

$$u = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\omega}{\varkappa} \cdot \frac{\partial \chi_n'}{\partial \omega_x}$$

$$v = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\omega}{\varkappa} \cdot \frac{\partial \chi_n'}{\partial \omega_y}$$

$$w = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\omega}{\varkappa} \cdot \frac{\partial \chi_n'}{\partial \omega_z} \quad ,$$

und ihre Strömungsfunktion ist:

$$\psi = \frac{\varrho}{n+1} \cdot \frac{\omega}{\varkappa} \cdot \chi_n' \quad .$$

Konstruktion der Strömungslinien.

2. Es sei χ_n noch weiter zerlegt, wir betrachten das Glied

$$\chi_{ni} = A_{ni}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \cos i\omega P_{ni} \quad .$$

Dazu gehört die Strömungsfunktion:

$$\psi_{ni} = -\frac{\varrho}{n+1}\frac{\omega i}{\varkappa} A_{ni}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \sin i\omega P_{ni} \quad .$$

Digitized by Google

Daraus ergiebt sich folgende einfache Konstruktion für die Strömungslinien, welche ein derartiges einfaches Potential hervorruft:

Man zeichne auf eine beliebige Kugelschicht die Linien gleichen Potentiales auf, und drehe hierauf die Schicht um den Winkel $\pi/2i$, die gezeichneten Linien stellen jetzt die Stromlinien dar, welche unter dem Einflusse jenes Potentiales entstehen.

Rotiert beispielsweise die Kugel unter dem Einflusse einer konstanten Kraft, deren Richtung zur Rotationsaxe senkrecht ist, so erfüllt das äufsere Potential die hier gestellten Bedingungen, es ist $n = 1$, $i = 1$. Die Niveaulinien des Potentiales auf der Kugel sind Kreise, also sind auch die Strömungslinien Kreise. Die Ebenen ersterer sind parallel zur Rotationsaxe und senkrecht zur Richtung der Kraft, sonach sind die Ebenen letzterer parallel zur Richtung der Kraft und zur Rotationsaxe.

3. Wir können den Wert von ψ in eine Form bringen, welche die Summation über sämtliche Kugelfunktionen erlaubt, also die Zerlegung des äufseren Potentiales nach solchen überflüssig macht. Umformung der Lösung.

Es sei n positiv, dann ist

$$\int_0^{\varrho} \chi_n \, d\varrho = \frac{\varrho}{n+1} \chi_n \quad .$$

Sei zweitens n negativ, dann ist

$$\int_{\infty}^{\varrho} \chi_n \, d\varrho = \frac{\varrho}{n+1} \chi_n \quad .$$

Also ist für positive n

$$\psi = \frac{\omega}{\varkappa} \int_0^{\varrho} \frac{\partial \chi_n}{\partial \omega} \, d\varrho \quad ,$$

und für negative n

$$\psi = -\frac{\omega}{\varkappa} \int_{\varrho}^{\infty} \frac{\partial \chi_n}{\partial \omega} \, d\varrho \quad .$$

Digitized by Google

Summation über die Kugelfunktionen.

Diese Ausdrücke lassen ohne weiteres die Summation zu, und wir erhalten folgende zweite Form der Lösung:

Bezeichnet χ_i den Teil des Potentiales, welcher von inneren, χ_a den Teil, welcher von äufseren Magneten herrührt, so ist:

$$\psi = \frac{\omega}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial\omega}\left\{\int_0^{\varrho}\chi_a\,d\varrho - \int_{\varrho}^{\infty}\chi_i\,d\varrho\right\} .$$

Ebenso ergiebt sich:

$$\varphi = -\omega\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\int_0^{\varrho}\chi_a\,d\varrho - \int_{\varrho}^{\infty}\chi_i\,d\varrho\right\} .$$

Für eine unendlich dünne Kugelschale vom Radius R wird:

$$\psi = \frac{\omega}{k}\left\{\int_0^{R}\frac{\partial\chi_a}{\partial\omega}\,d\varrho - \int_R^{\infty}\frac{\partial\chi_i}{\partial\omega}\,d\varrho\right\}$$

$$\varphi = -\omega\sin\theta\left\{\int_0^{R}\frac{\partial\chi_a}{\partial\theta}\,d\varrho - \int_R^{\infty}\frac{\partial\chi_i}{\partial\theta}\,d\varrho\right\} .$$

Daraus folgt zwischen φ und ψ die Beziehung:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\omega} + \varkappa\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 0 .$$

§ 3. Vollständige Lösung für unendlich dünne Hohlkugeln.

Es soll jetzt die Wirkung der Selbstinduktion in Betracht gezogen werden, es werde jedoch in diesem Paragraphen die Betrachtung auf eine unendlich dünne Kugelschale beschränkt. Der Einfachheit halber werde in der ausgeführten Rechnung n als positiv vorausgesetzt.

Einer üblichen Anschauungsweise folgend, betrachten wir zunächst den gesamten Induktionsakt als eine unendliche Reihe einzelner Induktionen; die von den äufseren Magneten induzierte Strömung induziert eine zweite, diese eine dritte, und so fort ins unendliche. Wir berechnen alle diese Ströme und

Digitized by Google

addieren sie; so lange die Summe gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert, stellt dieser sicherlich die thatsächlich stattfindende Strömung dar.

Sei

$$\chi_n = \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n Y_n$$

ein Teil der äufseren Potentialfunktion. Das von dieser induzierte Potential ist:

$$\Omega_i = -\frac{4\pi R}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{k} \cdot \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n Y'_n$$

$$\Omega_a = \frac{4\pi R n}{(2n+1)(n+1)} \cdot \frac{\omega}{k} \cdot \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} Y'_n \quad .$$

Berechnung der successiven Induktionen.

Lassen wir erstens innerhalb der Hohlkugel eine zweite rotieren, welche der ersten unendlich nahe sei und sich mit gleicher Geschwindigkeit bewege, so wird in dieser von den Strömen erster Ordnung (Ω_i) eine Strömung induziert, deren magnetisches Potential im Innern ist:

$$\Omega'_i = \left(\frac{4\pi R}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{k}\right)^2 \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n Y''_n \quad .$$

Lassen wir zweitens aufserhalb der ursprünglichen Hohlkugel eine zweite rotieren, die der ersten unendlich nahe sei, so wird in dieser durch den Einfluſs der Ströme erster Ordnung (Ω_a) eine Strömung induziert werden, deren Potential im Innern ist:

$$\Omega'_i = \frac{4\pi R n}{(2n+1)(n+1)} \frac{\omega}{k} \cdot \frac{4\pi R(n+1)}{(2n+1)n} \frac{\omega}{k} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n Y''_n$$

$$= \left(\frac{4\pi R}{2n+1} \frac{\omega}{k}\right)^2 \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n Y''_n \quad .$$

Beide Ausdrücke für Ω' fallen zusammen. Mit beiden fällt daher auch das Potential derjenigen Strömung zusammen, welche die Strömung erster Ordnung in der Kugelschale selber induziert. Indem wir in ganz derselben Weise die folgenden Induktionen berechnen und alles addieren, erhalten wir für die Gesamtwirkung:

Digitized by Google

$$\Omega_i = \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \sum_1^\infty{}^m \left(-\frac{4\pi R\omega}{(2n+1)k}\right)^m \frac{\partial^m Y_n}{\partial \omega^m}$$

$$\Omega_a = -\frac{n}{n+1}\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} \sum_1^\infty{}^m \left(-\frac{4\pi R\omega}{(2n+1)k}\right)^m \frac{\partial^m Y_n}{\partial \omega^m}$$

$$\psi = -\frac{2n+1}{4\pi(n+1)} \sum_1^\infty{}^m \left(-\frac{4\pi R\omega}{(2n+1)k}\right)^m \frac{\partial^m Y_n}{\partial \omega^m} \quad .$$

Die erhaltenen Ausdrücke lassen sich weiter entwickeln, wenn man Y_n noch weiter zerlegt. Man hat:

$$Y_n = \sum_0^n{}^i (A_{ni} \cos i\omega + B_{ni} \sin i\omega) P_{ni} \quad .$$

Wir beschränken die Untersuchung auf ein Glied dieser Reihe, und sei also:

$$Y_n = A_{ni} \cos i\omega P_{ni} \quad .$$

Dann haben wir:

$$\Omega_i = A_{ni}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n P_{ni}\left\{\frac{4\pi R\omega i}{(2n+1)k} \sin i\omega - \left(\frac{4\pi R\omega i}{(2n+1)k}\right)^2 \cos i\omega \right.$$
$$\left. - \left(\frac{4\pi R\omega i}{(2n+1)k}\right)^3 \sin i\omega + \left(\frac{4\pi R\omega i}{(2n+1)k}\right)^4 \cos i\omega + \ldots.\right\} \quad .$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{4\pi R\omega i}{(2n+1)k} = h \quad (h \text{ ist eine reine Zahl}) \quad ,$$

so wird jetzt:

$$\Omega_i = A_{ni}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n P_{ni}(\sin i\omega - h\cos i\omega)(1 - h^2 + h^4 - h^6 + \ldots) h \quad .$$

Ist h ein echter Bruch, so konvergiert die in Ω enthaltene Reihe und wir erhalten:

$$\Omega_i = A_{ni}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \frac{h}{1+h^2}(\sin i\omega - h\cos i\omega) P_{ni}$$

Digitized by Google

$$\Omega_a = -\frac{n}{n+1} A_{ni} \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} \frac{h}{1+h^2} (\sin i\omega - h \cos i\omega) P_{ni}$$

$$\psi = -\frac{2n+1}{4\pi(n+1)} A_{ni} \frac{h}{1+h^2} (\sin i\omega - h \cos i\omega) P_{ni} \ .$$

Ist $h > 1$[1]), so divergiert die in Ω vorkommende Reihe, und die Auffassung des Phänomens als einer Reihe successiver Induktionen ist nicht mehr zulässig, da jede folgende gröfser als die vorhergehende werden würde.

Nichtsdestoweniger gelten die aufgestellten Formeln für jedes h, wie man leicht a posteriori verifiziert und auch durch dieselben Schlüsse ableiten kann, welche wir bei Hohlkugeln von endlicher Dicke anzuwenden haben werden. Da ich die vorliegenden Formeln nochmals aus den allgemeinen ableiten werde, will ich mich hier nicht bei denselben aufhalten.

Wir setzen noch:

$$\operatorname{tg} \delta = h \ ,$$

dann können wir schreiben:

$$\Omega_i = A_{ni} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \sin \delta \sin (i\omega - \delta) P_{ni}$$

$$\Omega_a = -\frac{n}{n+1} A_{ni} \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} \sin \delta \sin (i\omega - \delta) P_{ni}$$ Die Lösung.

$$\psi = -\frac{2n+1}{4\pi(n+1)} A_{ni} \sin \delta \sin (i\omega - \delta) P_{ni} \ .$$

Das Resultat ist also das folgende:

1. Die Strömungsfunktion, welche eine einfache Kugelfunktion induziert, ist eine einfache Kugelflächenfunktion derselben Art, wie diejenige, welche in der induzierenden Funktion enthalten ist. Die Konstruktion, welche wir früher (§ 2, 2) zur Bestimmung der Strömungskurven anwandten, können wir daher auch hier beibehalten, wir haben aber die behandelte Kugelschicht im Sinne der Rotation um einen gewissen Winkel δ/i Konstruktion der Strömungslinien.

[1]) Eine kupferne Hohlkugel von 50 mm Radius, 2 mm Wandstärke, mufs beiläufig ca. 87 Umdrehungen in der Sekunde machen, damit für $i = 1$, $n = 1$, $h = 1$ werde.

Digitized by Google

gegen die früher festgesetzte Lage zu drehen. Dieser Winkel ist bei kleinen Drehungsgeschwindigkeiten diesen proportional, bei gröfseren konvergiert er gegen die Gröfse $\pi/2i$. Die Intensität, welche anfangs den Rotationsgeschwindigkeiten proportional wächst, wächst bei steigenden Werten derselben immer langsamer und konvergiert gegen eine feste Grenze.

Die Geschwindigkeit ist unendlich.

2. Wird schliefslich $\omega/k = \infty$, so wird $\delta = \pi/2$, also

$$\Omega_i = -\chi_n$$

$$\Omega_a = \frac{n}{n+1}\chi_n$$

$$\psi = \frac{2n+1}{4\pi(n+1)}\bar{\chi}_n \quad .$$

Dieser Schluſs gilt nicht für diejenigen Glieder der Entwickelung, welche symmetrisch zur Rotationsachse sind. Für diese ist i, also h, also Ω gleich Null für jede Drehungsgeschwindigkeit. Diese Glieder rufen keine Strömung, sondern nur eine Verteilung freier Elektricität in der Kugel hervor.

Eine unendlich schnell rotierende Hohlkugel läfst also nur diejenigen Teile des äufseren Potentiales in ihrem Inneren wirken, welche symmetrisch zur Axe sind; sind solche Glieder nicht vorhanden, so ist das Innere der Kugel gegen den Einfluſs von Aufsen geschützt. Ist das Potential eine Kugelfunktion, so findet die Strömung in den Linien gleichen Potentiales statt.

Das elektrische Potential.

3. Für das elektrische Potential, welches χ_n entspricht, hatten wir gefunden ohne Berücksichtigung der Selbstinduktion:

$$\bar{\varphi} = -\frac{\omega}{n+1} R \sin\theta \frac{\partial \bar{\chi}_n}{\partial \theta} \quad .$$

Mit Berücksichtigung der Selbstinduktion werden wir haben:

$$\bar{\varphi} = -\frac{\omega}{n+1} R \sin\theta \frac{\partial \overline{\chi_n + \Omega_i}}{\partial \theta} \quad .$$

Daraus folgt: Die Gestalt der Niveaulinien des Potentiales bleibt (für jede induzierende Kugelfunktion) ungeändert durch die Selbstinduktion, die Niveaulinien erscheinen um denselben Winkel gedreht, wie die Strömungslinien. Für die Teile des äufseren

Digitized by Google

Potentiales, welche symmetrisch zur Achse sind, wächst φ ins unendliche bei wachsender Geschwindigkeit, für die übrigen konvergiert es gegen einen endlichen Grenzwert, welcher sich leicht bestimmen läfst.

Ausartungen der Kugelschale.

Ebene Platten.

Wir lassen jetzt den Radius der Kugelschale unendlich werden, die Variationen des induzierenden Potentiales aber endlich bleiben, wir untersuchen sodann näher die elektrische Bewegung am Äquator und am Pol. Wir erhalten so die Theorie geradlinig bewegter und rotierender ebener Platten. Erstere kann als ein spezieller Fall letzterer angesehen werden, es empfiehlt sich aber in mancher Hinsicht, diese Fälle gesondert zu behandeln.

Geradlinig bewegte Platten.

A. *Geradlinig bewegte Platten.*

Wir führen das Koordinatensystem der $\xi\ \eta\ \zeta$ ein, dessen Zusammenhang mit den x, y, z durch Fig. 7 gegeben ist.

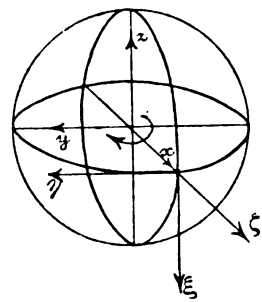


Fig. 7.

Die Richtung der η ist die positive Bewegungsrichtung. Die wirkenden Magnete denken wir uns in der Kugel, also auf der Seite der negativen ζ. Wir haben zu untersuchen, welche Form in den $\xi\ \eta\ \zeta$ die Kugelfunktion

$$A_{ni}\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1}\cos i\omega P_{ni}$$

annimmt.

Um endliche Variationen zu erhalten, haben wir n und i ∞ werden zu lassen von der Ordnung von R, wir setzen

$$\text{für } n \qquad nR$$

$$\text{für } i \qquad rR\ .$$

Wir ersetzen ferner

$$\varrho,\ \omega,\ \theta$$

Digitized by Google

durch

$$R + \zeta \ , \qquad \frac{\eta}{R} \ , \qquad \frac{\pi}{2} + \frac{\xi}{R} \ .$$

Dadurch geht über:

$$\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} \text{in } e^{-n\zeta} \ ,$$

$$\cos i\omega \text{ in } \cos r\eta \ .$$

$P_{ni}(\theta)$ mufs in eine solche Funktion ven ξ übergehen, dafs das Produkt derselben mit $e^{-n\zeta}\cos r\eta$ der Gleichung $\Delta\varphi = 0$ genügt. Eine solche Funktion ist $\cos s\xi$ oder $\sin s\xi$, wenn

$$n^2 = r^2 + s^2$$

ist.

Sonach nehmen die früheren Kugelfunktionen jetzt die Form an:

$$A_{rs}\, e^{-n\zeta} \cos r\eta \cos s\xi \ ,$$

und verwandte.

Als Summe solcher Formen ist die äufsere Potentialfunktion χ darzustellen. Diese Darstellung hat durch FOURIER'sche Integrale zu erfolgen.

Für jedes Glied (Element) der Entwickelung geht nun die Lösung unmittelbar aus dem früheren hervor. Für das angeführte setzen wir

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{2\pi r}{n} \cdot \frac{\alpha}{k} \ ,$$

worin α die Geschwindigkeit der Platte bezeichnet, und haben:

Die Lösung.

$$\Omega_+ = A_{rs}\, e^{-n\zeta} \sin\delta \sin(r\eta - \delta) \cos s\xi$$

$$\Omega_- = -A_{rs}\, e^{n\zeta} \sin\delta \sin(r\eta - \delta) \cos s\xi$$

$$\psi = \frac{1}{2\pi} A_{rs} \sin\delta \sin(r\eta - \delta) \cos s\xi \ .$$

Durch Summation über alle Glieder folgen die vollständigen Integrale des Problems. Die Summation läfst sich ausführen für den Fall, dafs α/k unendlich wird. Dann ist

$$\delta = \frac{\pi}{2} \ , \qquad \sin\delta = 1 \ ,$$

Digitized by Google

also

$$\Omega_+ = -\chi$$

$$\psi = -\frac{1}{2\pi}\bar{\chi} \quad .$$

Auf der den Magneten abgewandten Seite ist dann das Potential Null, die Strömung erfolgt überall in den Niveaulinien des induzierenden Potentiales.

Abgesehen von diesem Grenzfall ist indessen die Anwendung der obigen Lösung eine sehr weitläufige; wir sehen uns deshalb nach Näherungsmethoden um. Zu solchen gelangen wir zunächst wieder durch Einführung der successiven Induktionen. Damit die Betrachtung derselben erlaubt sei, muſs $2\pi\alpha/k$ ein echter Bruch sein; ist diese Bedingung erfüllt, so führt die Rechnung, wie schon im allgemeinen Falle gezeigt ist, zu einem konvergenten Resultate.

Wir gehen wieder von der unendlichen Hohlkugel aus. Zu der induzierenden Potentialfunktion χ_{-n-1} gehörte im äuſseren Raum die induzierte Potentialfunktion:

$$\Omega_a = -\frac{4\pi R}{2n+1}\frac{\omega}{k}\frac{\partial\chi_{-n-1}}{\partial\omega} \quad .$$

Lassen wir nun R unendlich werden, während wir ersetzen

$$\frac{\partial}{\partial\omega} \text{ durch } R\frac{\partial}{\partial\eta} \quad ,$$

$$n \text{ durch } nR \quad ,$$

$$\omega R \text{ durch } \alpha \quad ,$$

$$\chi_{-n-1} \text{ durch } \chi_n = A_n e^{-n\zeta}\cos r\eta\cos s\xi \quad ,$$

so wird:

$$\Omega_+ = -\frac{2\pi\alpha}{k}\frac{1}{n}\frac{\partial\chi_n}{\partial\eta} \quad .$$

Aber es ist:

$$\int_\zeta^\infty \chi_n\, d\zeta = \frac{\chi_n}{n} \quad .$$

Digitized by Google

Also ist, nach Summation über alle n:

$$\Omega_+ = -\frac{2\pi\alpha}{k}\int_\zeta^\infty \frac{\partial\chi}{\partial\eta}\,d\zeta \quad .$$

Aus diesem Ω können wir nun in ganz derselben Weise das induzierte Potential zweiter Ordnung erhalten, und indem wir in derselben Weise fortrechnen, erhalten wir schliefslich das Resultat:

$$\Omega_+ = -\frac{2\pi\alpha}{k}\int_\zeta^\infty \frac{\partial\chi}{\partial\eta}\,d\zeta + \left(\frac{2\pi\alpha}{k}\right)^2 \int_\zeta^\infty\int_\zeta^\infty \frac{\partial^2\chi}{\partial\eta}\,d\zeta^2 - \dots$$

Zweite Form der Lösung.

$$\Omega_-(-\zeta) = -\Omega_+(\zeta)$$

$$\psi' = \frac{1}{2\pi}\overline{\Omega}_+ \quad .$$

Diese Reihe führt, hinreichend fortgesetzt, zu dem exakten Resultate; in der That ist sie nur die Entwickelung desselben nach steigenden Potenzen von $2\pi\alpha/k$, wie sich in folgender Weise zeigt:

In der Kugelschale läfst sich das zu $\chi_{(-n-1)i}$ gehörige Ω_a in der Form darstellen: (Seite 55.)

$$\Omega_a = -\frac{1}{1+h^2}\left(\frac{h}{i}\frac{\partial\chi}{\partial\omega} + h^2\chi\right)$$

$$h = \frac{4\pi R\omega i}{(2n+1)k} \quad .$$

Machen wir nun wieder die auf die ebene Platte bezüglichen Substitutionen, entwickeln

$$\frac{1}{1+h^2} = 1 - h^2 + h^4 - h^6 + \dots \quad ,$$

und setzen für h seinen Wert

$$\frac{2\pi\alpha}{k}\cdot\frac{r}{n} \quad ,$$

so folgt:

Digitized by Google

$$\Omega_+ = -\frac{2\pi\alpha}{k}\frac{1}{n}\frac{\partial\chi_{rs}}{\partial\eta} - \left(\frac{2\pi\alpha}{k}\right)^2\frac{r^2}{n^2}\chi_{rs} + \left(\frac{2\pi\alpha}{k}\right)^3\frac{r^2}{n^3}\frac{\partial\chi_{rs}}{\partial\eta} + \left(\frac{2\pi\alpha}{k}\right)^4\frac{r^4}{n^4}\chi_{rs} - \cdots ,$$

aus welcher Entwickelung die vorige folgt, wenn man die Relationen

$$\int_\zeta^\infty \chi_{rs}\, d\zeta = \frac{\chi_{rs}}{n} \quad , \qquad \frac{\partial^2\chi_{rs}}{\partial\eta^2} = -r^2\chi_{rs}$$

anwendet, und die Summation über alle r und s ausführt.

Hieran knüpft sich naturgemäfs der Versuch, für sehr grofse Werte von $2\pi\alpha/k$ eine Entwickelung nach absteigenden Potenzen dieser Gröfse zu erhalten.

Ist $h > 1$, so haben wir

$$\frac{1}{1+h^2} = \frac{1}{h^2}\left(1 - \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^4} - \cdots\right) ,$$

also:

$$\Omega_+ = -\chi_{rs} - \frac{k}{2\pi\alpha}\frac{n}{r^2}\frac{\partial\chi_{rs}}{\partial\eta} + \left(\frac{k}{2\pi\alpha}\right)^2\frac{n^2}{r^2}\chi_{rs} + \left(\frac{k}{2\pi\alpha}\right)^3\frac{n^3}{r^4}\frac{\partial\chi_{rs}}{\partial\eta} - \cdots$$

Die Glieder dieser Reihe lassen nun allerdings, wie der Versuch zeigt, eine Darstellung, welche unmittelbar die Summation über alle χ_{rs} erlaubt, nicht zu; setzen wir aber voraus, dafs χ symmetrisch zur ηAxe sei, so dafs in seiner Entwickelung nur Glieder mit $\cos r\eta$ vorkommen, so haben wir

$$-n\chi_{rs} = \frac{\partial\chi_{rs}}{\partial\zeta}$$

$$-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\chi}{\partial\eta} = \int_0^\eta \chi_{rs}\, d\eta \quad ,$$

und können dann wenigstens für die Glieder erster Ordnung in $k/2\pi\alpha$ die Summation ausführen. Indem wir uns auf diese beschränken, erhalten wir:

Digitized by Google

Annähernde Lösung für grofse Werte der Geschwindigkeit.

$$\Omega_+ = -\chi - \frac{k}{2\pi\alpha}\int_0^\eta \frac{\partial\chi}{\partial\xi}\,d\eta \quad ,$$

und für das sehr klein werdende Gesamtpotential auf der positiven Seite:

$$\Omega + \chi = -\frac{k}{2\pi\alpha}\int_0^\eta \frac{\partial\chi}{\partial\xi}\,d\eta \quad .$$

Aufser der schon angeführten Bedingung müssen wir dieser Formel jedoch eine weitere Beschränkung auferlegen.

Ist nämlich $2\pi\alpha/k$ auch noch so grofs, so wird doch für gewisse Elemente, für welche r verschwindet, $h < 1$, also die benutzte Entwickelung ungültig werden. Dieser Umstand hat zur Folge, dafs der aufgestellte Ausdruck nur in einem begrenzten Gebiete gilt, welches übrigens um so weiter ist, je gröfser $2\pi\alpha/k$ wird. Ich verweise deshalb auf die gleich folgende Betrachtung (Seite 64).

Potential der freien Elektricität.

Wir bestimmen noch das Potential φ der freien Elektricität. Dasselbe ergiebt sich aus dem für die Hohlkugel gewonnenen Resultate durch ganz dieselben Substitutionen, welche wir beständig angewandt haben und wird erhalten:

1. ohne Berücksichtigung der Selbstinduktion:

$$\bar{\varphi} = \alpha\int_0^\infty \frac{\partial\chi}{\partial\xi}\,d\xi \quad ,$$

2. mit Berücksichtigung derselben:

$$\bar{\varphi} = \alpha\int_0^\infty \frac{\partial(\chi+\Omega)}{\partial\xi}\,d\xi \quad .$$

Von Interesse ist der Fall, dafs die Geschwindigkeit α unendlich wird. Nehmen wir an, dafs χ symmetrisch zur ηAxe ist, und beschränken uns auf ein endliches Gebiet, so haben wir für $\alpha = \infty$:

$$\Omega + \chi = -\frac{k}{2\pi\alpha}\int_0^\eta \frac{\partial\chi}{\partial\xi}\,d\eta \quad ,$$

Digitized by Google

also wird:

$$\bar{\varphi} = -\frac{k}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial\xi}\int_0^{\eta}\frac{\partial\chi}{\partial\zeta}\,d\eta\,d\zeta$$

$$= \frac{k}{2\pi}\int_0^{\eta}\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial\xi}\,d\eta \quad .$$

φ nähert sich also bei wachsender Geschwindigkeit einem festen endlichen Grenzwerte.

B. *Rotierende Scheiben.* Rotierende Scheiben.

Es werde jetzt die Nachbarschaft des Poles betrachtet, wir erhalten so die Theorie einer unendlichen rotierenden Scheibe. Die induzierenden Magnete mögen wieder im Innern der Kugel gedacht sein. Die Schlüsse, welche wir anzuwenden haben, sind den im vorigen Falle gemachten ganz analog.

Als Koordinaten benutzen wir ϱ, ω, z; ϱ soll hier den senkrechten Abstand von der Rotationsaxe bezeichnen. In den allgemeinen Formeln haben wir dann zu ersetzen:

$$\varrho \text{ durch } R + z \quad ,$$

$$\theta \text{ durch } \frac{\varrho}{R} \quad ,$$

$$\omega \text{ bleibt } \omega \quad ,$$

nach Einführung dieser Substitutionen haben wir R unendlich werden zu lassen. Es geht dann eine einfache Kugelfunktion über in die Form:

$$A_{ni}e^{-nz}\cos i\omega\, J^i(n\varrho) \quad ,$$

(und in analoge), in welcher J^i die $i$te Bessel'sche Funktion bezeichnet. Durch Integrale, welche den Fourier'schen ganz analog sind, ist das gegebene χ in Glieder dieser Form zu zerspalten.

Wir behandeln jedes Glied einzeln.

Setzen wir:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{2\pi\omega}{k}\cdot\frac{i}{n} \quad ,$$

Digitized by Google

so ist für das angeführte Glied die Lösung des Problemes:

Die Lösung.

$$\Omega_+ = A_{ni}\, e^{-nz} \sin\delta \sin(i\omega - \delta)\, J^i(n\varrho)$$

$$\Omega_- = -A_{ni}\, e^{nz} \sin\delta \sin(i\omega - \delta)\, J^i(n\varrho)$$

$$\psi = \frac{1}{2\pi} A_{ni} \sin\delta \sin(i\omega - \delta)\, J^i(n\varrho) \quad .$$

Durch Summation ergeben sich die vollständigen Integrale.

Wir suchen wieder eine Entwickelung nach Potenzen von $2\pi\omega/k$ zu erhalten durch Berücksichtigung der successiven Induktionen. Durch genau dieselben Schlüsse wie oben erhalten wir:

$$\Omega_+ = -\frac{2\pi\omega}{k}\int_z^\infty \frac{\partial\chi}{\partial\omega}\,dz + \left(\frac{2\pi\omega}{k}\right)^2 \int_z^\infty\int_z^\infty \frac{\partial^2\chi}{\partial\omega^2}\,dz^2 - \ldots$$

Zweite Form der Lösung.

$$\Omega_-(-z) = -\Omega_+(z)$$

$$\psi = \frac{1}{2\pi}\overline{\Omega}_+ \quad .$$

Bemerkungen zu letzterer.

Die Gültigkeit dieser Formeln ist aber an eine Beschränkung geknüpft, welche den früheren analogen aufzuerlegen wir nicht nötig hatten. Ihre Ableitung setzt nämlich voraus, dafs für jedes einzelne Glied der Entwickelung von χ die Anschauung der Gesamtinduktion als einer Reihe successiver Induktionen erlaubt sei. Nach den Resultaten, die wir für Kugeln erhalten haben, ist diese Bedingung nur für diejenigen Glieder erfüllt, für welche $2\pi\omega i/kn$ ein echter Bruch ist. Nun kann aber n jeden Wert von Null bis ∞ annehmen, für eine Reihe von Gliedern ist daher die notwendige Bedingung nicht erfüllt, das Resultat kann also nur ein angenähertes sein. In Bezug hierauf bemerke ich folgendes:

1. Im Endlichen verschwinden die Glieder, für welche n einen sehr kleinen Wert hat, gegen diejenigen, für welche n einen endlichen Wert hat. Der in obiger Formel begangene Fehler mufs daher zunächst für grofse ϱ einen merklichen Wert erhalten.

2. Die Gröfse $2\pi\omega/k$ kann immer so klein gedacht werden, dafs innerhalb eines gegebenen Gebietes die Annäherung eine gegebene sei. Denn eine Verkleinerung von $2\pi\omega/k$ vermindert

Digitized by Google

die Anzahl der Glieder, welche der erforderlichen Bedingung nicht genügen, eine beliebige Verkleinerung vermindert die Anzahl derselben in beliebigem Grade.

Die genaue Bestimmung des Gültigkeitsgebietes bei einem gegebenen $2\pi\omega/k$ und gegebener Annäherung dürfte Schwierigkeiten haben; für die Anwendungen ist diese Bestimmung ohne Wichtigkeit, da es sich hier erstens immer um sehr kleine Werte von $2\pi\omega/k$, zweitens nicht um unendliche, sondern um begrenzte Platten handelt.

Die Gleichung

$$\Omega = -\frac{2\pi\omega}{k}\int_s^\infty \frac{\partial\chi}{\partial\omega}\,dz$$

ist exakt, wenn man von der Selbstinduktion absieht. Es zeigt sich also, dafs die Erlaubnis, von der Selbstinduktion absehen zu dürfen, nicht nur an die Bedingung, dafs $2\pi\omega/k$ klein sei, sondern auch an die Beschränkung auf ein gewisses endliches Gebiet geknüpft ist. Die Gröfse dieses Gebietes hängt von $2\pi\omega/k$ ab, über dasselbe hinaus aber ist ohne Berücksichtigung der Selbstinduktion auch keine angenäherte Bestimmung der Strömung mehr möglich. Ein ganz analoges Resultat wird uns am Ende des § 4 begegnen.

Möglichkeit, die Selbstinduktion zu vernachlässigen.

Auch eine Entwickelung für grofse Werte von $2\pi\omega/k$ läfst sich aufstellen. Wir bezeichnen mit χ_0 den Teil von χ, welcher symmetrisch zur Rotationsaxe ist, mit $\chi_1 = \chi - \chi_0$ den Rest. Dem χ_0 entspricht für jede Drehungsgeschwindigkeit der Wert $\Omega = 0$. Wir erhalten daher, wenn wir χ als symmetrisch zur xAxe annehmen, für grofse Werte von $2\pi\omega/k$:

Annäherung für grofse Werte der Geschwindigkeit.

$$\Omega = -\chi_1 - \frac{k}{2\pi\omega}\int_0^\infty \frac{\partial\chi_1}{\partial z}\,d\omega \quad .$$

Die Ableitung ist dieselbe wie oben. Die Reihe läfst sich hier auch vollständig und auch für solche χ ausführen, welche nicht symmetrisch zur xAxe sind; ich gehe darauf nicht weiter ein.

Zum Schlufs bestimmen wir das Potential φ der freien Elektricität. Durch die passenden Substitutionen ergiebt sich aus den allgemeinen Formeln:

Digitized by Google

Potential der freien Elektricität.

1. ohne Berücksichtigung der Selbstinduktion:

$$\varphi = \omega\varrho \int_0^\infty \frac{\partial\chi}{\partial\varrho}\, dz \quad .$$

Diesem φ ist eventuell eine Konstante von der Gröfse hinzuzufügen, dafs in der Unendlichkeit $\varphi = 0$ wird. Die Formel, zu welcher wir gelangt sind, ist schon von Herrn Jochmann angegeben für den Fall, dafs χ symmetrisch zur zAxe ist, es zeigt sich, dafs dieselbe ganz allgemein gilt.

2. mit Berücksichtigung der Selbstinduktion haben wir:

$$\bar{\varphi} = \omega\varrho \int_0^\infty \frac{\partial(\chi + \Omega)}{\partial\varrho}\, dz \quad .$$

Für ∞ werdende ω erhalten wir, wenn χ symmetrisch zur xAxe ist:

$$\varphi = \omega\varrho \int_0^\infty \frac{\partial\chi_0}{\partial\varrho}\, dz + \frac{k}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\partial\chi_1}{\partial\varrho}\, d\omega \quad .$$

Das erste Glied wächst mit ω ins unendliche.

Wir haben bei der Behandlung ebener Platten immer angenommen, dafs nur auf einer Seite der bewegten Platte sich induzierende Magnete befinden; diese Voraussetzung ist unwesentlich. Ist sie nicht erfüllt, so zerlegen wir das gesamte Potential nach seinem Ursprung in zwei Teile, und behandeln jeden so, wie dies oben an einem von ihnen gezeigt ist.

§ 4. Vollständige Lösung für Kugeln und Hohlkugeln von endlicher Dicke.

Wir wenden uns jetzt zur Bestimmung der Induktion in einer Hohlkugel von endlicher Dicke. Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, mögen zunächst nur im äufseren Raum induzierende Magnete vorausgesetzt werden.

Es seien U, V, W die Komponenten eines Vektorpotentiales, welches von geschlossenen Strömen herrührt, die ganz oder teilweise im Innern der Kugel liegen. Wir suchen die

Digitized by Google

von U, V, W induzierten Ströme u' v' w'. Für dieselben bestehen die Gleichungen:

$$\varkappa u' = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \omega x\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

$$\varkappa v' = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \omega y\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

Die Differentialgleichungen.

$$\varkappa w' = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \omega x\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) - \omega y\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) ,$$

ferner im Innern:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 ,$$

und an der Oberfläche:

$$u'x + v'y + w'z = 0 .$$

Wir setzen zur Abkürzung:

$$O = x\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) + y\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) + z\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) .$$

Unter Beachtung des Umstandes, daſs

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 ,$$

erhalten wir nun für φ die Bedingungen:

In der Masse der Hohlkugel:

$$\Delta\varphi = 2\omega\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) + \omega\,(x\Delta V - y\Delta U) ,$$

und an der Grenze:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = \frac{\omega}{\varrho}\left\{\varrho^2\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) - zO\right\} .$$

Wir beweisen zunächst den folgenden Satz: Haben UVW die Form:

Satz, welcher die Grundlage des Folgenden bildet.

$$U = \varrho^m\left(y\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - z\frac{\partial \chi_n}{\partial y}\right)$$

Digitized by Google

$$V = \varrho^m \left(z \frac{\partial \chi_n}{\partial x} - x \frac{\partial \chi_n}{\partial z} \right)$$

$$W = \varrho^m \left(x \frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y \frac{\partial \chi_n}{\partial x} \right) \quad ,$$

welche Form der Gleichung

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

genügt, so sind die Lösungen der vorstehenden Differentialgleichungen:

$$\varphi = - \omega \varrho^m \left(\varrho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n \right)$$

$$= \omega \varrho^{m+1} \sin \theta \frac{\partial \chi_n}{\partial \theta}$$

$$u' = - \frac{\omega}{\varkappa} \varrho^m \left(y \frac{\partial \chi'_n}{\partial z} - z \frac{\partial \chi'_n}{\partial y} \right)$$

$$v' = - \frac{\omega}{\varkappa} \varrho^m \left(z \frac{\partial \chi'_n}{\partial x} - x \frac{\partial \chi'_n}{\partial z} \right)$$

$$w' = - \frac{\omega}{\varkappa} \varrho^m \left(x \frac{\partial \chi'_n}{\partial y} - y \frac{\partial \chi'_n}{\partial x} \right) \quad .$$

Beweis desselben.

Um den Beweis der Richtigkeit zu führen, drücken wir zunächst die Bedingungen für φ in χ_n aus. Es ist: (§ 1,4)

$$\Delta U = m(m + 2n + 1) \varrho^{m-2} \left(y \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - z \frac{\partial \chi_n}{\partial y} \right)$$

$$\Delta V = m(m + 2n + 1) \varrho^{m-2} \left(z \frac{\partial \chi_n}{\partial x} - x \frac{\partial \chi_n}{\partial z} \right)$$

$$\Delta W = m(m + 2n + 1) \varrho^{m-2} \left(x \frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y \frac{\partial \chi_n}{\partial x} \right)$$

$$y\Delta U - x\Delta V = m(m + 2n + 1) \varrho^{m-2} \left(\varrho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n \right)$$

$$z\Delta V - y\Delta W = m(m + 2n + 1) \varrho^{m-2} \left(\varrho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial x} - nx\chi_n \right)$$

$$x\Delta W - z\Delta U = m(m + 2n + 1) \varrho^{m-2} \left(\varrho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial y} - ny\chi_n \right) \quad ,$$

Digitized by Google

ferner:

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = -m\varrho^{m-2}\left(\varrho^2\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n\right) - \varrho^m(n+1)\frac{\partial \chi_n}{\partial z}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} = -m\varrho^{m-2}\left(\varrho^2\frac{\partial \chi_n}{\partial x} - nx\chi_n\right) - \varrho^m(n+1)\frac{\partial \chi_n}{\partial x}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} = -m\varrho^{m-2}\left(\varrho^2\frac{\partial \chi_n}{\partial y} - ny\chi_n\right) - \varrho^m(n+1)\frac{\partial \chi_n}{\partial y} .$$

Daraus folgt:

$$O = -n(n+1)\varrho^m\chi_n .$$

Also werden die Bedingungen für φ:

$$\Delta\varphi = -\omega m(m+2n+3)\left(\varrho^2\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n\right)\varrho^{m-2}$$

$$-2\omega(n+1)\varrho^m\frac{\partial \chi_n}{\partial z} ;$$

an der Grenze:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = -(m+n+1)\frac{\omega}{\varrho}\varrho^m\left(\varrho^2\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n\right) .$$

Diesen Bedingungen aber genügt φ, denn es ist erstens:

$$\Delta\varphi = -\omega\left\{\Delta\left(\varrho^{m+2}\frac{\partial \chi_n}{\partial z}\right) - 2n\frac{\partial}{\partial z}(\varrho^m\chi_n) - nz\Delta(\varrho^m\chi_n)\right\}$$

$$= -\omega\left\{\varrho^n\frac{\partial \chi_n}{\partial z}[(m+2)(m+2n+1) - 2n]\right.$$

$$\left. - nz\varrho^{m-2}\chi_n[m(m+2n+1) + 2m]\right\}$$

$$= -\omega\left\{m(m+2n+3)\varrho^{m-2}\left(\varrho^2\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n\right)\right.$$

$$\left. + 2(n+1)\varrho^n\frac{\partial \chi_n}{\partial z}\right\} ,$$

wonach die erste Bedingung erfüllt ist;

Digitized by Google

zweitens ist φ das Produkt aus einer Funktion der Winkel und ϱ^{m+n+1}, also

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = \frac{m+n+1}{\varrho} \varphi \quad ,$$

wonach auch die zweite Bedingung erfüllt ist. Aus dem so als richtig nachgewiesenen φ folgen aber die $u' v' w'$ durch die ursprünglichen Differentialgleichungen, zunächst allerdings in einer etwas komplizierteren Form. Ganz dieselbe Form ist aber schon Seite 46 aufgetreten, und es hat sich schon dort gezeigt, dafs sie mit der hier gegebenen identisch ist.

Folgerungen. An diesen Satz knüpfen sich die folgenden Bemerkungen.

1. Wir können in demselben ϱ^m durch eine Reihe von Potenzen, deren jede mit einer willkürlichen Konstanten multipliziert ist, also durch eine willkürliche Funktion von ϱ ersetzen. Wir können zweitens χ_n durch eine Reihe von Kugelfunktionen verschiedenen Grades mit beliebigen Koefficienten ersetzen, da die Ordnungszahl n im Endresultat keine Rolle spielt. Hieraus ergiebt sich folgende Verallgemeinerung des Satzes:

Ist χ eine ganz beliebige Funktion und

$$U = \frac{\partial \chi}{\partial \omega_x}$$

$$V = \frac{\partial \chi}{\partial \omega_y}$$

$$W = \frac{\partial \chi}{\partial \omega_z} \quad ,$$

so sind die von U, V, W induzierten $u' v' w'$:

$$u' = -\frac{\omega}{\varkappa} \frac{\partial \chi'}{\partial \omega_x}$$

$$v' = -\frac{\omega}{\varkappa} \frac{\partial \chi'}{\partial \omega_y}$$

$$w' = -\frac{\omega}{\varkappa} \frac{\partial \chi'}{\partial \omega_z} \quad .$$

Es ist nicht schwer, diesen Satz mit den in früheren Paragraphen erhaltenen Resultaten in Verbindung zu setzen.

Digitized by Google

2. Die durch obige Formen gegebenen UVW rühren von Strömungen her, die in konzentrischen Kugelschalen erfolgen. Denn es ist

$$x\Delta U + y\Delta V + z\Delta W = 0 \quad .$$

Umgekehrt lassen sich die U, V, W solcher Strömungen immer in obiger Form darstellen. Denn ist $\chi_n f(\varrho)$ das Glied in der Entwickelung der Strömungsfunktion, welches die $n$te Kugelfunktion enthält, so haben die zu diesem Gliede gehörigen U, V, W ohne weiteres die obige Form.

Andererseits geschehen auch die induzierten Strömungen in konzentrischen Kugelschalen. Denn es ist

$$u'x + v'y + w'z = 0 \quad .$$

Wir folgern daraus:

Die Strömung geschieht immer in konzentrischen Kugelschalen.

Eine Strömung, welche in konzentrischen Kugelschalen erfolgt, induziert eine Strömung, welche dieselbe Eigenschaft hat. Und weiter: Die Strömungen, welche in einer rotierenden Hohlkugel durch ruhende Magnete induziert werden, erfolgen immer in konzentrischen Kugelschalen um den Nullpunkt.

3. Es ist

$$\varphi = \omega\,(xV - yU) \quad ,$$

sobald U, V, W die obige Form, also die induzierenden Ströme die besprochene Eigentümlichkeit haben. Wir werden dies in § 8 benutzen müssen.

Berechnung der successiven Induktionen.

Es ist nun nicht mehr schwer, die successiven Induktionen zu berechnen, welche ein gegebenes äufseres Potential hervorruft. Sei χ_n das $n$te Glied in der Entwickelung desselben. Wir fanden die Ströme erster Induktion:

$$u_1 = \frac{1}{n+1}\,\frac{\omega}{\varkappa}\,\frac{\partial\chi'}{\partial\omega_x}$$

$$v_1 = \frac{1}{n+1}\,\frac{\omega}{\varkappa}\,\frac{\partial\chi'}{\partial\omega_y}$$

$$w_1 = \frac{1}{n+1}\,\frac{\omega}{\varkappa}\,\frac{\partial\chi'}{\partial\omega_z} \quad .$$

Digitized by Google

Die zugehörigen U_1 V_1 W_1 sind:

$$U_1 = \frac{2\pi}{n+1}\frac{\omega}{\varkappa}\frac{\partial\chi'}{\partial\omega_x}\left(\frac{R^2}{2n+1} - \frac{\varrho^2}{2n+3} - \frac{2r^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)\varrho^{2n+1}}\right)$$

$$V_1 = \frac{2\pi}{n+1}\frac{\omega}{\varkappa}\frac{\partial\chi'}{\partial w_y}\left(\frac{R^2}{2n+1} - \frac{\varrho^2}{2n+3} - \frac{2r^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)\varrho^{2n+1}}\right)$$

$$W_1 = \frac{2\pi}{n+1}\frac{\omega}{\varkappa}\frac{\partial\chi'}{\partial\omega_z}\left(\frac{R^2}{2n+1} - \frac{\varrho^2}{2n+3} - \frac{2r^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)\varrho^{2n+1}}\right).$$

Man findet diese Werte durch eine einfache Integration, indem man beachtet, dafs $u_1 v_1 w_1$ Produkte von ϱ^n und Kugelflächenfunktionen sind. Das Potential jeder unendlich dünnen Kugelschicht im Inneren und Äufseren derselben ist bekannt und eine Integration nach ϱ giebt die angeführten Werte. Es folgen aus denselben die Strömungen zweiter Induktion:

$$u_2 = -\frac{2\pi}{n+1}\left(\frac{\omega}{\varkappa}\right)^2\frac{\partial\chi''}{\partial\omega_x}\left(\frac{R^2}{2n+1} - \frac{\varrho^2}{2n+3} - \frac{2r^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)\varrho^{2n+1}}\right)$$

$$v_2 = -\frac{2\pi}{n+1}\left(\frac{\omega}{\varkappa}\right)^2\frac{\partial\chi''}{\partial\omega_y}\left(\frac{R^2}{2n+1} - \frac{\varrho^2}{2n+3} - \frac{2r^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)\varrho^{2n+1}}\right)$$

$$w_2 = -\frac{2\pi}{n+1}\left(\frac{\omega}{\varkappa}\right)^2\frac{\partial\chi''}{\partial\omega_z}\left(\frac{R^2}{2n+1} - \frac{\varrho^2}{2n+3} - \frac{2r^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)\varrho^{2n+1}}\right).$$

In derselben Weise kann die Rechnung beliebig fortgesetzt werden, die Resultate derselben werden jedoch immer komplizierter und wir wenden uns daher zur exakten Lösung des Problemes.

Allgemeine Lösung.

Wir sahen, dafs die Strömungen immer senkrecht zum Radius sind, wir können also wieder von der Strömungsfunktion Gebrauch machen.

Sei $f(\varrho) = f$ eine beliebige Funktion von ϱ, sei

$$\psi = \varrho \cdot f \cdot \chi_n$$

die Strömungsfunktion eines in der Kugel bestehenden Stromsystemes.

Die Stromdichten sind:

Digitized by Google

$$u = f\frac{\partial \chi_n}{\partial \omega_x}$$

$$v = f\frac{\partial \chi_n}{\partial \omega_y}$$

$$w = f\frac{\partial \chi_n}{\partial \omega_z} \quad .$$

Sei nun $F(\varrho) = F$ eine zweite Funktion von ϱ, welche mit f durch die Gleichung verbunden ist:

$$F(\varrho) = \frac{4\pi}{2n+1}\frac{1}{\varrho^{2n+1}}\left\{\int_r^{\varrho} a^{2n+2} f(a)da + \int_{\varrho}^{R} \varrho^{2n+1} a f(a)\, da\right\},$$

aus welcher durch Differentiation folgt:

$$\frac{d}{d\varrho}\left(\varrho^{-2n}\frac{d}{d\varrho}(\varrho^{2n+1}F)\right) = -4\pi\varrho f(\varrho) \quad .$$

Es sind dann die zu u, v, w gehörigen U, V, W:

$$U = F\frac{\partial \chi_n}{\partial \omega_x}$$

$$V = F\frac{\partial \chi_n}{\partial \omega_y}$$

$$W = F\frac{\partial \chi_n}{\partial \omega_z} \quad .$$

Daraus folgen die von dem System ψ induzierten Ströme:

$$u' = -\frac{\omega}{\varkappa} F\frac{\partial \chi'_n}{\partial \omega_x}$$

$$v' = -\frac{\omega}{\varkappa} F\frac{\partial \chi'_n}{\partial \omega_y}$$

$$w' = -\frac{\omega}{\varkappa} F\frac{\partial \chi'_n}{\partial \omega_z} \quad .$$

Die zu diesem System gehörige Strömungsfunktion ist:

$$\psi' = -\frac{\omega}{\varkappa}\varrho F\chi'_n \quad .$$

Digitized by Google

Es induziert also die Funktion

$$\psi = \varrho \cdot f \cdot \chi_n$$

die andere:

$$\psi' = -\frac{\omega}{\varkappa} \varrho F \chi_n' \ .$$

Es bedeute nun ψ die in der Kugel unter dem Einflusse der äufseren Potentialfunktion χ_n thatsächlich bestehende Strömung, ψ_0 sei die von den äufseren Magnetismen direkt induzierte Strömung, dann ist offenbar die Bedingung des stationären Zustandes:

$$\psi = \psi_0 + \psi' \ .$$

Um diese Gleichung weiter zu entwickeln, zerlegen wir χ_n und betrachten jedes Glied für sich; sei das vorgelegte:

$$\chi_{ni} = A \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \cos i\omega P_{ni} \ .$$

Wir haben dann (Seite 50):

$$\psi_0 = -\frac{\omega}{\varkappa} A\varrho \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \frac{i}{n+1} \sin i\omega P_{ni} \ .$$

Setzt man nun

$$\psi = -\frac{\omega}{\varkappa} A\varrho \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \frac{i}{n+1} (f_1(\varrho) \sin i\omega + f_2(\varrho) \cos i\omega) P_{ni} \ ,$$

so wird

$$\psi' = \left(\frac{\omega}{\varkappa}\right)^2 A\varrho \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \frac{i^2}{n+1} (F_1\varrho \cos i\omega - F_2\varrho \sin i\omega) P_{ni} \ .$$

Die Gleichung $\psi = \psi_0 + \psi'$ ist nun erfüllt, wenn f_1 und f_2 den Gleichungen genügen:

$$f_1(\varrho) = 1 + \frac{i\omega}{\varkappa} F_2(\varrho)$$

$$f_2(\varrho) = -\frac{i\omega}{\varkappa} F_1(\varrho) \ ,$$

durch welche f_1 und f_2 vollständig bestimmt sind.

Denken wir uns f_1 und f_2 gefunden, so läfst sich das Resultat der Untersuchung in folgender Form aussprechen:

Digitized by Google

Die Selbstinduktion läfst die Form der Strömungslinien (für jedes einzelne Glied der Entwickelung) ungeändert, ihre Wirkung besteht darin:

erstens, die Erscheinung um den $i$ten Teil eines gewissen Winkels δ im Sinne der Rotation zu drehen, eines Winkels, der für die verschiedenen Schichten von verschiedener Gröfse ist, und für welchen die Gleichung $\operatorname{tg}\delta = f_2/f_1$ gilt,

zweitens, die Intensität der Strömung in den verschiedenen Schichten in verschiedener Weise abzuändern. Das Verhältnis der wirklich stattfindenden Intensität zu der ohne Berücksichtigung der Selbstinduktion erhaltenen ist

$$= \sqrt{f_1^2 + f_2^2} : 1 \quad .$$

Mit der Bestimmung der Funktionen f_1 und f_2 werden wir uns einige Zeit zu beschäftigen haben.

Behandlung der Gleichungen für die f.

Wir führen die folgenden Abkürzungen ein: Es sei

$$\frac{4\pi i\omega}{\varkappa} = \mu^2$$

$$\mu r = s, \qquad \mu R = S$$

$$f_1(\varrho) = \varphi_1(\mu\varrho) = \varphi_1\sigma$$

$$f_2(\varrho) = \varphi_2(\mu\varrho) = \varphi_2\sigma \quad .$$

Wir denken uns in die Gleichungen, welche f_1 und f_2 bestimmen, für F_1 und F_2 ihre Werte gesetzt, wir transformieren sodann die Gleichungen auf φ und σ, und erhalten:

$$\varphi_1\sigma = 1 + \frac{1}{(2n+1)\,\sigma^{2n+1}}\left\{\int_s^\sigma a^{2n+2}\varphi_2 a da + \int_\sigma^S \sigma^{2n+1} a\varphi_2 a da\right\}$$

$$\varphi_2\sigma = -\frac{1}{(2n+1)\,\sigma^{2n+1}}\left\{\int_s^\sigma a^{2n+2}\varphi_1 a da + \int_\sigma^S \sigma^{2n+1} a\varphi_1 a da\right\} .$$

Durch Differentiation geben dieselben:

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\sigma^{-2n}\frac{d}{d\sigma}(\sigma^{2n+1}\varphi_1)\right) = -\sigma\varphi_2$$

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\sigma^{-2n}\frac{d}{d\sigma}(\sigma^{2n+1}\varphi_2)\right) = \sigma\varphi_1 \quad .$$

Digitized by Google

Die Form der Funktionen φ_1 und φ_2 hängt also nur ab von n, in den Integrationskonstanten kommen dann allerdings noch μ, s und S vor.

Obige Gleichungen können geschrieben werden:

$$\varphi_1'' + \frac{2n+2}{\sigma}\varphi_1' = -\varphi_2$$

$$\varphi_2'' + \frac{2n+2}{\sigma}\varphi_2' = \varphi_1 .$$

Als Differentialgleichungen können dieselben vollständig ersetzt werden durch die folgenden:

$$\varphi_2 = \pm \varphi_1 \sqrt{-1}$$

$$\varphi_1'' + \frac{2n+2}{\sigma}\varphi_1' \pm \varphi_1 \sqrt{-1} = 0 .$$

Denn alle Lösungen der letzteren befriedigen erstere, und die allgemeine Lösung der letzteren enthält 2×2 willkürliche Konstanten, ist also auch die allgemeine Lösung der ersteren.

Setzen wir $\lambda^4 = -1$, und verstehen insbesondere unter λ diejenigen Wurzeln dieser Gleichung, deren reeller Teil positiv ist, also:

$$\lambda_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}(1 + \sqrt{-1})$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}(1 - \sqrt{-1}) ,$$

so werden unsere Gleichungen:

$$\varphi_2 = -\lambda^2 \varphi_1$$

$$\varphi_1'' + \frac{2n+2}{\sigma}\varphi_1' - \lambda^2 \varphi_1 = 0 .$$

Die beiden partikulären Integrale derselben sind:

$$\int_{-1}^{+1} (1 - v^2)^n e^{\sigma\lambda v} dv , \qquad \int_{1}^{\infty} (1 - v^2)^n e^{-\sigma\lambda v} dv ,$$

gültig für reelle positive σ.

Dafs diese Integrale die Gleichungen befriedigen, wird etwas weiter unten gezeigt werden. Da in unserem Falle n eine ganze Zahl ist, so lassen sich die Integrale ausführen und also das Resultat der Auflösung in endlicher geschlossener

Digitized by Google

Form aufstellen, der Einfachheit halber möge die Integralform beibehalten werden. Setzt man

$$p_n \sigma = \int_{-1}^{+1} (1 - v^2)^n e^{\sigma v} \, dv$$

$$q_n \sigma = \int_{1}^{\infty} (1 - v^2)^n e^{-\sigma v} \, dv \ ,$$

Definition der p und q.

so sind offenbar die Lösungen der Differentialgleichungen:

$$\varphi_1 = A p_n(\lambda_1 \sigma) + B p_n(\lambda_2 \sigma) + C q_n(\lambda_1 \sigma) + D q_n(\lambda_2 \sigma)$$

$$-\varphi_2 = \lambda_1^2 A p_n(\lambda_1 \sigma) + \lambda_2^2 B p_n(\lambda_2 \sigma) + \lambda_1^2 C q_n(\lambda_1 \sigma) + \lambda_2^2 D q_n(\lambda_2 \sigma) \ .$$

Diese Lösungen sind in die Integralgleichungen einzusetzen und daraus die Konstanten zu bestimmen. Zur Ausmittelung der dabei auftretenden Integrale dienen die folgenden Rechnungen:

Man hat:

$$p_n(\lambda\sigma) = \int_{-1}^{+1} (1 - v^2)^n e^{\lambda\sigma v} \, dv \ ,$$

$$\sigma^{-2n} \frac{d}{d\sigma} (\sigma^{2n+1} p_n) = \int_{-1}^{+1} (1 - v^2)^n (\sigma v \lambda + 2n + 1) e^{v\lambda\sigma} \, dv$$

$$= 2n p_{n-1}(\lambda\sigma) \ ^1) \ ,$$

$$\frac{d}{d\sigma}\left[\sigma^{-2n} \frac{d}{d\sigma} (\sigma^{2n+1} p_n)\right] = \lambda \int_{-1}^{+1} (1 - v^2)^n (v^2 \lambda\sigma + 2(n+1)v) e^{v\sigma\lambda} dv$$

$$= \lambda^2 \sigma p_n(\lambda\sigma) \ ^1).$$

Die letzte Gleichung zeigt, dafs p_n eine Lösung der vorgelegten Differentialgleichung ist.

Durch rückwärtsschreitende Integration findet man nun aus den vorigen Formeln:

---

[1]) Die letzten Glieder der Gleichungen werden durch Umformung der voranstehenden Integrale, vorzüglich durch partielle Integration erhalten.

Digitized by Google

Integral- und Rekursionsformeln der p und q.

$$\int \sigma p_n(\lambda\sigma)\, d\sigma = \frac{2n}{\lambda^2} p_{n-1}(\lambda\sigma)$$

und

$$\int \sigma^{2n} p_{n-1}(\lambda\sigma)\, d\sigma = \frac{1}{2n} \sigma^{2n+1} p_n(\lambda\sigma) \quad ,$$

aus welchen durch Differentiation die Rekursionsformeln folgen:

$$p_n(\lambda\sigma) = \frac{2n}{\lambda} \frac{p'_{n-1}(\lambda\sigma)}{\sigma}$$

$$p_{n-1}(\lambda\sigma) = \frac{2n+1}{2n} p_n(\lambda\sigma) + \frac{\lambda\sigma}{2n} p'_n(\lambda\sigma) \quad ,$$

aus welchen folgt:

$$p_{n-1} = \frac{2n+1}{2n} p_n + \frac{\lambda^2\sigma^2}{4n(n+1)} p_{n+1}$$

$$p_n = \frac{2}{\lambda^2\sigma^2} \{2n(n-1) p_{n-2} - n(2n-1) p_{n-1}\} \quad .$$

Ganz ähnliche Rechnungen lassen sich nun auch für die q_n durchführen, die Resultate gehen aus den eben gewonnenen einfach durch Vertauschung von p mit q hervor, man hat also auch:

$$\int \sigma q_n(\lambda\sigma)\, d\sigma = \frac{2n}{\lambda^2} q_{n-1}(\lambda\sigma)$$

$$\int \sigma^{2n} q_{n-1}(\lambda\sigma)\, d\sigma = \frac{1}{2n} \sigma^{2n+1} q_n(\lambda\sigma) \text{ etc.}$$

Mit Zuhilfenahme dieser Formeln hat die Ausführung der notwendigen Integrationen keine Schwierigkeit, beispielsweise hat man, unter Zuhilfenahme einer partiellen Integration:

$$\int_s^\sigma a^{2i+2} p_n(a)\, da + \sigma^{2n+1} \int_\sigma^S a p_n(a)\, da$$

$$= \frac{2n}{\lambda^2} \sigma^{2n+1} p_{n-1}(S) - \frac{2n s^{2n+1} p_{n-1}(s)}{\lambda^2} + \frac{(2n+1) s^{2n+1} p_n(s)}{\lambda^2}$$

$$- \frac{2n+1}{\lambda^2} \sigma^{2n+1} p_n(\sigma)$$

$$= \frac{2n}{\lambda^2} \sigma^{2n+1} p_{n-1}(S) - \frac{s^{2n+3}}{2(n+1)} p_{n+1}(s) - \frac{2n+1}{\lambda^2} \sigma^{2n+1} p_n(\sigma).$$

Digitized by Google

Setzt man diese und die ähnlich zu bildenden Ausdrücke für q in die Gleichungen ein, beachtet, dafs $\varphi_2 = -\varphi_1 \lambda^2$, und $\lambda^4 = -1$, so heben sich die p und q, wie es sein mufs, heraus und es bleiben Gleichungen zurück von der Form

$$0 = \text{const}_1 + \frac{\text{const}_2}{\varrho^{2n+1}} \quad ,$$

welches die Lösungen der Gleichung

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\sigma^{-2n}\frac{d}{d\sigma}(\sigma^{2n+1}\varphi)\right) = 0$$

sind.

Die hier auftretenden Konstanten müssen einzeln verschwinden, und es werden so die folgenden 4 Gleichungen für $A\,B\,C\,D$ erhalten, unter Beachtung des Umstandes, dafs

$$\frac{1}{\lambda_1^2} = -\frac{1}{\lambda_2^2}$$

ist:

$$\frac{2n+1}{2n} = Ap_{n-1}(\lambda_1 S) + Bp_{n-1}(\lambda_2 S) + Cq_{n-1}(\lambda_1 S) + Dq_{n-1}(\lambda_2 S)$$

$$0 = Ap_{n-1}(\lambda_1 S) - Bp_{n-1}(\lambda_2 S) + Cq_{n-1}(\lambda_1 S) - Dq_{n-1}(\lambda_2 S)$$

$$0 = Ap_{n+1}(\lambda_1 s) + Bp_{n+1}(\lambda_2 s) + Cq_{n+1}(\lambda_1 s) + Dq_{n+1}(\lambda_2 s)$$

$$0 = Ap_{n+1}(\lambda_1 s) - Bp_{n+1}(\lambda_2 s) + Cq_{n+1}(\lambda_1 s) - Dq_{n+1}(\lambda_2 s).$$

Dieselben lassen sich leicht auflösen und ergeben:

$$A = \frac{2n+1}{4n} \cdot \frac{q_{n+1}(\lambda_1 s)}{p_{n-1}(\lambda_1 S)q_{n+1}(\lambda_1 s) - p_{n+1}(\lambda_1 s)q_{n-1}(\lambda_1 S)}$$

$$C = -\frac{2n+1}{4n} \cdot \frac{p_{n+1}(\lambda_1 s)}{p_{n-1}(\lambda_1 S)q_{n+1}(\lambda_1 s) - p_{n+1}(\lambda_1 s)q_{n-1}(\lambda_1 S)}$$

$$B = \frac{2n+1}{4n} \cdot \frac{q_{n+1}(\lambda_2 s)}{p_{n-1}(\lambda_2 S)q_{n+1}(\lambda_2 s) - p_{n+1}(\lambda_2 s)q_{n-1}(\lambda_2 S)}$$

$$D = -\frac{2n+1}{4n} \cdot \frac{p_{n+1}(\lambda_2 s)}{p_{n-1}(\lambda_2 S)q_{n+1}(\lambda_2 s) - p_{n+1}(\lambda_2 s)q_{n-1}(\lambda_2 S)}$$

Digitized by Google

Indem man diese Ausdrücke in φ_1 und φ_2 einsetzt, erhält man die vollständige Lösung. Dieselbe lässt sich einfacher darstellen in folgender Weise: Da λ_1 und λ_2 konjugiert sind, so sind auch $p(\lambda_1\sigma)$ und $p(\lambda_2\sigma)$ konjugiert, ebenso sind, wie man leicht sieht, A und B konjugiert, und es ist daher

$$Ap_n(\lambda_1\sigma) + Bp_n(\lambda_2\sigma)$$

gleich dem doppelten Werte des reellen Teiles jedes dieser Ausdrücke. Ebenso ist

$$Ap_n(\lambda_1\varrho) - Bp_n(\lambda_2\varrho) \quad ,$$

welcher Ausdruck in φ_2 vorkommt, gleich dem Doppelten des imaginären Teiles des ersten Gliedes. Indem man dies beachtet, und die Werte von A und C, erkennt man leicht die Richtigkeit der Gleichung:

Lösung der Gleichungen für die f mittels der p und q.

$$\frac{2n+1}{2n} \cdot \frac{p_n(\lambda_1\sigma)\,q_{n+1}(\lambda_1 s) - q_n(\lambda_1\sigma)\,p_{n+1}(\lambda_1 s)}{p_{n-1}(\lambda_1 S)\,q_{n+1}(\lambda_1 s) - q_{n-1}(\lambda_1 S)\,p_{n+1}(\lambda_1 s)}$$
$$= \varphi_1 + \varphi_2\sqrt{-1} = f_1 + f_2\sqrt{-1} \quad .$$

Besonders einfach wird die Gleichung, wenn $s = 0$ ist, es sich also um eine Vollkugel handelt. Dann ist $q_{n+1}(s)$ unendlich, unsere Gleichung wird also:

$$\frac{2n+1}{2n}\,\frac{p_n(\lambda_1\sigma)}{p_{n-1}(\lambda_1 S)} = \varphi_1 + \varphi_2\sqrt{-1} \quad .$$

Die Gröfsen, auf deren Kenntnis es uns besonders ankommt, nämlich der Winkel $\delta = \operatorname{arc\,tg} f_2/f_1$ und die Verstärkung der Stromstärke $\sqrt{f_1^2 + f_2^2}$, haben eine sehr einfache analytische Bedeutung, sie sind Amplitude und Modul der links stehenden komplexen Gröfsen.

Die Rechnungen lassen sich weiter führen mit Zuhilfenahme der folgenden Bemerkungen:

Weitere Eigenschaften der p und q.

Die Integrale, durch welche p und q definiert sind, lassen sich für ganzzahlige n unbestimmt ausführen, und die p und q also in geschlossener Form erhalten. Wir können und wollen unter den p und q diese so ausgerechneten Funktionen verstehen. Dann sind auch q mit negativem Argument zulässig, und es gilt die Gleichung

$$-p_n(\varrho) = q_n(\varrho) + q_n(-\varrho) \quad ,$$

Digitized by Google

aus welcher folgt, daſs

$$p_n(\varrho) = p_n(-\varrho) \quad .$$

Denn sei, unbestimmt ausgeführt,

$$\int (1 - v^2)^n e^{-\sigma v}\, dv = V(\sigma, v) \quad ,$$

dann ist

$$q_n(\sigma) = V(\sigma, \infty) - V(\sigma, 1)$$

$$p_n(\sigma) = \int_0^1 (1 - v^2)^n e^{-\sigma v}\, dv + \int_0^1 (1 - v^2)\, e^{\sigma v}\, dv$$

$$= V(-\sigma, 1) - V(-\sigma, 0)$$

$$+ V(\sigma, 1) - V(\sigma, 0) \quad .$$

Aber es ist für ganze n

$$V(\sigma, \infty) = 0 \quad , \quad V(-\sigma, 0) = -V(\sigma, 0) \quad ,$$

und so folgt die Behauptung.

Die einfachsten Integrale der ursprünglichen Differentialgleichung sind also:

$$q_n(\sigma) \text{ und } q_n(-\sigma) \quad .$$

Folgendes sind die Werte der ersten q, von welchen der erste direkt, die übrigen durch Rekursion bestimmt sind:

Die ersten q.

$$q_0 = \frac{e^{-\sigma}}{\sigma}$$

$$q_1 = -\frac{2e^{-\sigma}}{\sigma^2}\left(1 + \frac{1}{\sigma}\right)$$

$$q_2 = \frac{2.2!.e^{-\sigma}}{\sigma^3}\left(1 + \frac{3}{\sigma} + \frac{3}{\sigma^2}\right)$$

$$q_3 = -\frac{2\,3!.e^{-\sigma}}{\sigma^4}\left(1 + \frac{6}{\sigma} + \frac{15}{\sigma^2} + \frac{15}{\sigma^3}\right) \text{ etc.,}$$

woraus also folgt:

$$p_0 = \frac{e^{\sigma} - e^{-\sigma}}{\sigma}$$

$$p_1 = \frac{2}{\sigma^2}\left(e^{\sigma} + e^{-\sigma} - \frac{e^{\sigma} - e^{-\sigma}}{\sigma}\right) \text{ etc.}$$

Digitized by Google

Für grosse Werte von σ nähern sich die p und q den Ausdrücken:

Die p und q für grofse und kleine Werte des Argumentes.

$$q_n = (-2)^n n!. \frac{e^{-\sigma}}{\sigma^{n+1}}$$

$$p_n(\sigma) = -q_n(-\sigma) \quad .$$

Für sehr kleine Werte von σ wird:

$$q_n(\sigma) = \frac{(-2)^n n!\, 1.3 \ldots 2n-1}{\sigma^{2n+1}} e^{-\sigma} \quad .$$

Die Gleichung $-p(\sigma) = q(\sigma) + q(-\sigma)$ verliert hier ihre Bedeutung, da für $\sigma = 0$, $q = \pm\infty$ wird. Um auch für sehr kleine σ p zu kennen, entwickeln wir es in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von σ. Es geschieht das leicht, indem man in dem Integral, welches p darstellt, für e^{σ} seine Reihe setzt und gliedweise integriert; man erhält:

$$p_n(\sigma) = \frac{2^{n+1} n!}{1.3 \ldots 2n-1} \left\{ 1 + \frac{\sigma^2}{2.2n+3} + \frac{\sigma^4}{2.4.2n+3.2n+5} + \ldots \right\} .$$

Von Wichtigkeit für später ist uns noch die folgende Formel: Es ist:

$$q_n(\sigma)\, q_{n-1}(-\sigma) - q_n(-\sigma)\, q_{n-1}(\sigma)$$

a) $$= -\frac{4n(n-1)}{\sigma^2} \left\{ q_{n-1}(\sigma) q_{n-2}(-\sigma) - q_{n-1}(-\sigma) q_{n-2}(\sigma) \right\}$$

$$= \frac{n!\,(n-1)!}{\sigma} \left(-\frac{4}{\sigma^2} \right)^n \quad ,$$

welche Formel sich durch die für q gefundene Rekursionsformel leicht beweisen läfst.

In allen besprochenen Eigenschaften der p_n und q_n zeigt sich eine nahe Verwandtschaft derselben zu den BESSEL'schen Funktionen; in der That lassen sich die J^m durch die $p_{m+\frac{1}{2}}$ und $q_{m+\frac{1}{2}}$ ausdrücken.

Aus der Formel, welche unser Resultat bildete, können wir nun die Funktion p fortschaffen, und erhalten:

Digitized by Google

$$\frac{2n+1}{n} \cdot \frac{q_{n+1}(\lambda s)\, q_n(-\lambda\sigma) - q_{n+1}(-\lambda s)\, q_n(\lambda\sigma)}{q_{n+1}(\lambda s)\, q_{n-1}(-\lambda S) - q_{n+1}(-\lambda s)\, q_{n-1}(\lambda S)} \quad ^{1)}$$

Definitive Form der Lösung.

$$= \varphi_1 + \varphi_2 \sqrt{-1} \quad .$$

Wir wenden diese Formel, welche die exakte Lösung giebt, auf spezielle Fälle an, welche Vereinfachungen zulassen. Anwendung derselben.

1. Es sei zunächst die Hohlkugel sehr dünn, sei d ihre Dicke. Es ist dann S sehr wenig verschieden von s, sei Dünne Kugelschalen.

$$S = s + \delta \quad , \quad \text{wo nun } \delta = \mu d \text{ ist} \quad .$$

Für σ können wir einen beliebigen Wert zwischen s und S setzen, sei $\sigma = S$.

Setzt man diesen Wert in obige Formel ein, wendet im Nenner die Substitution

$$q_{n-1} = \frac{2n+1}{2n} q_n + \frac{\lambda^2\sigma^2}{4n(n+1)} q_{n+1}$$

an, und dividiert durch den Zähler, so erhält man:

$$\varphi_1 + \varphi_2 \sqrt{-1} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda^2\mu^2}{2(n+1)(2n+1)} \cdot \frac{q_{n+1}(\lambda s)\, q_{n+1}(-\lambda S) - q_{n+1}(-\lambda s)\, q_{n+1}(\lambda S)}{q_{n+1}(\lambda s)\, q_n(-\lambda S) - q_{n+1}(-\lambda s)\, q_n(\lambda S)}} \cdot$$

Setzt man nun entwickelnd:

$$q_{n+1}(\lambda S) = q_{n+1}\{\lambda(s+\delta)\}$$

$$= q_{n+1}(\lambda s) + \lambda\delta\, q'_{n+1}(\lambda s)$$

$$= q_{n+1}(\lambda s) + \frac{\delta\lambda^2 s}{2(n+2)} q_{n+2}(\lambda s) \quad ,$$

$$q_{n+1}(-\lambda S) = q_{n+1}(-\lambda s) - \frac{\delta\lambda^2 s}{2(n+2)} q_{n+2}(-\lambda s) \quad ,$$

---

1) Es werde fortan für λ_1 einfach λ geschrieben, und ist also

$$\lambda = \sqrt{\tfrac{1}{2}}(1 + \sqrt{-1}) \quad .$$

Digitized by Google

so kann man unter Zuhilfenahme von Formel a) (Seite 82) die q durch Division wegheben und erhält:

$$\varphi_1 + \varphi_2\sqrt{-1} = \frac{1}{1 + \frac{s\delta\lambda^2}{2n+1}} \quad .$$

Nun ist aber

$$\frac{s\delta}{2n+1} = \frac{4\pi Ri\omega}{(2n+1)\,k} = h$$

nach unserer früheren Bezeichnungsweise, also wird:

$$\varphi_1 + \varphi_2\sqrt{-1} = \frac{1}{1+h\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{1}{1+h^2} - \frac{h}{1+h^2}\sqrt{-1} \quad ,$$

welches Resultat mit dem früher erhaltenen zusammenfällt.

Wir haben sonach einerseits unsere Formel an einem schon bekannten Resultate geprüft, andererseits den Beweis geführt, dafs die früher gegebenen Formeln für alle h gelten, welcher Beweis noch ausstand.

Kleine Rotationsgeschwindigkeiten.

2. Wir wenden zweitens unsere Formel auf den Fall an, dafs wir in den f_1 und f_2 nur die erste Potenz der Drehungsgeschwindigkeit beizubehalten brauchen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf eine Vollkugel. Für eine solche hatten wir:

$$f_1 + f_2\sqrt{-1} = \frac{2n+1}{2n}\,\frac{p_n(\lambda\sigma)}{p_{n-1}(\lambda S)} \quad .$$

Entwickeln wir die p und behalten nur die ersten Potenzen bei, so folgt:

$$f_1 + f_2\sqrt{-1} = \frac{2 + \frac{\sigma^2}{2n+3}\sqrt{-1}}{2 + \frac{S^2}{2n+1}\sqrt{-1}} \quad .$$

Eine nähere Betrachtung dieser Formel zeigt, dafs die aus derselben für f_1 und f_2 folgenden Werte, in ψ eingesetzt, nichts anderes ergeben, als die Induktionen erster und zweiter

Digitized by Google

Ordnung, welche wir schon auf Seite 72 berechnet haben. Wir betrachten hier nur den Drehungswinkel. Mit ausschliefslicher Berücksichtigung der ersten Potenzen hat man:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{f_2}{f_1} = \delta = -\frac{2\pi\omega i}{\varkappa}\left(\frac{R^2}{2n+1} - \frac{\varrho^2}{2n+3}\right) ,$$

also den Drehungswinkel

$$\frac{\delta}{i} = -\frac{2\pi\omega}{\varkappa}\left(\frac{R^2}{2n+1} - \frac{\varrho^2}{2n+3}\right) .$$

Es erscheinen also alle Schichten gedreht, die Drehung ist am kleinsten an der Oberfläche der Kugel und nimmt von dort gegen das Innere stetig zu. Denkt man sich durch den Äquator der Kugel einen ebenen Schnitt gelegt, und verbindet korrespondierende Punkte der verschiedenen Schichten, so erhält man ein System kongruenter Kurven, welches sehr geeignet ist, den Zustand der Kugel zu veranschaulichen. Die Gleichung einer dieser Kurven ist offenbar:

$$y = x\,\mathrm{tg}\left(\frac{\delta}{i},\ \varrho = \sqrt{x^2+y^2}\right) ,$$

oder sehr nahezu:

$$y = -\frac{2\pi\omega}{\varkappa}\,x\left(\frac{R^2}{2n+1} - \frac{x^2}{2n+3}\right) .$$

In Fig. 8 sind diese Kurven dargestellt für den Fall, dafs

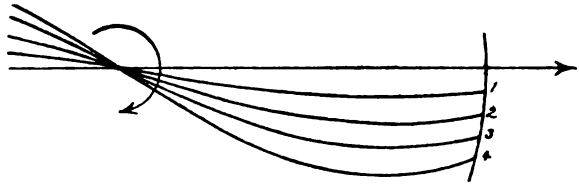


Fig. 8.

die Kugel von Kupfer, $R = 50\,\mathrm{mm}$, $n = 1$ ist, und dafs die Kugel 1, 2, 3, 4 Umdrehungen in der Sekunde macht.

3. Es werde drittens angenommen, dafs μ so grofs sei, dafs für die $\eta(S\lambda)$ und $\eta(s\lambda)$ ihre angenäherten Werte gesetzt werden können. Es werde ferner angenommen, dafs das Ver-

Digitized by Google

Grofse Rotationsgeschwindigkeiten.

hältnis r/R weder sehr nahe $= 1$, noch sehr nahe $= 0$ sei. Ersterer Fall ist schon erledigt, letzterer mufs besonders betrachtet werden. Durch Einsetzung der Näherungswerte in die exakte Formel wird erhalten:

$$\varphi_1 + \varphi_2\sqrt{-1} = \frac{2n+1}{\lambda}\frac{S^n}{\sigma^{n+1}}\frac{e^{\lambda(\sigma-s)} + e^{-\lambda(\sigma-s)}}{e^{\lambda(S-s)} - e^{-\lambda(S-s)}} \cdot$$

Da S nicht sehr nahe gleich s, beide aber sehr grofs sein sollen, so verschwindet im Nenner das zweite Glied gegen das erste, und es wird

$$\varphi_1 + \varphi_2\sqrt{-1} = \frac{2n+1}{\lambda S}\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} e^{-\lambda\mu(R-r)}\left(e^{\lambda\mu(\varrho-r)} + e^{-\lambda\mu(\varrho-r)}\right).$$

Das zweite Glied der Parenthese verschwindet gegen das erste, aufser wenn $\varrho = r$ ist; verzichten wir daher auf eine genaue Kenntnis der Strömung an der inneren Grenze, so können wir setzen:

$$\varphi_1 + \varphi_2\sqrt{-1} = \frac{2n+1}{\lambda S}\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} e^{-\lambda\mu(R-\varrho)} \quad .$$

Da s oder r aus dieser Gleichung verschwunden ist, so ist anzunehmen, dafs sie auch für Vollkugeln Gültigkeit hat, in der That ergiebt sie sich leicht aus den für Vollkugeln geltenden exakten Formeln, wenn man ähnliche Vernachlässigungen macht, wie die oben ausgeführten, und auf eine genaue Kenntnis der Strömung im Centrum verzichtet (wo übrigens die Intensität sehr klein ist).

In den erhaltenen Ausdrücken ist

$$\lambda = \sqrt{\tfrac{1}{2}}(1 + \sqrt{-1}) \quad ;$$

ohne die Sonderung des Imaginären und Reellen auszuführen, finden wir leicht:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{f_2}{f_1} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{\sqrt{2}}(R-\varrho)$$

$$\sqrt{f_1^2 + f_2^2} = \frac{2n+1}{\mu}\frac{R^n}{\varrho^{n+1}} e^{-\frac{\mu}{\sqrt{2}}(R-\varrho)} \quad .$$

Digitized by Google

Setzt man diese Ausdrücke in ψ ein, so erhält man:

$$\psi = -\frac{2n+1}{2(n+1)} A \sqrt{\frac{i\omega}{\varkappa\pi}}\, e^{-\frac{\mu}{\sqrt{2}}(R-\varrho)} \sin\left(i\omega - \frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{\sqrt{2}}(R-\varrho)\right),$$

welches also diejenige Strömungsfunktion ist, die bei sehr grofsen Drehungsgeschwindigkeiten von der äufseren Potentialfunktion

$$\chi_n = A\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \cos i\omega P_{ni}$$

hervorgerufen wird.

Die Bedeutung obiger Formel läfst sich leicht durchschauen; stellen wir ihr Ergebnis mit den früheren zusammen, so können wir die Erscheinung, welche eine mit beständig wachsender Geschwindigkeit unter dem Einflusse einer induzierenden Kugelfunktion rotierende Hohlkugel darbieten würde, in folgender Weise beschreiben:

Zusammenfassung des Resultates.

Beginnt die Selbstinduktion merklich zu werden, so verändert sie die Form der Strömungskurven in den einzelnen Kugelschichten nicht, die letzteren aber beginnen sich scheinbar zu drehen im Sinne der Rotation; dabei gehen die inneren Schichten den äufseren voraus. Die Drehung der inneren Schichten ist an keine Grenze gebunden, sondern kann ins Unendliche wachsen, der Drehungswinkel der äufsersten Schicht konvergiert gegen den Wert $\pi/4i$, nachdem er übrigens vorher bei Hohlkugeln diesen Wert überschritten haben kann. Ist die Drehungsgeschwindigkeit sehr grofs, so liegen korrespondierende Punkte verschiedener Schichten auf Archimedischen Spiralen, die Zahl der Windungen derselben in der Kugel wächst mit der Rotationsgeschwindigkeit ins Unendliche.

Die Intensität wächst anfangs mit der Rotationsgeschwindigkeit, aber nirgends dieser proportional, schneller in den äufseren, als in den inneren Schichten. In der äufsersten Schicht wächst sie beständig, schliefslich wie $\sqrt{\omega}$, in allen anderen erreicht sie bei einer gewissen Drehungsgeschwindigkeit ein Maximum, um dann wieder abzunehmen. Bei grofsen ω nimmt sie vom Rande gegen das Innere ab wie eine Exponentialfunktion, deren Exponent $\sqrt{\omega}$ enthält.

Von Interesse ist noch die Abhängigkeit der Erscheinung

Digitized by Google

von der Ordnungszahl i (deren Quadratwurzel auch in μ enthalten ist); ich verweise deshalb auf die Formeln.

Ein scheinbarer Widerspruch zwischen der Theorie einer unendlich dünnen Hohlkugel und der einer Hohlkugel von endlicher Dicke mag auffallen; derselbe löst sich leicht, wenn man beachtet, dafs jede noch so dünne Hohlkugel nur bis zu einer gewissen Gröfse der Rotationsgeschwindigkeit als unendlich dünn betrachtet werden darf.

Fall, dafs die Magnete im Inneren der Hohlkugel liegen.

Ich will noch kurz den Fall erledigen, dafs die induzierenden Magnete im Innern der Hohlkugel liegen, dafs also die auftretenden Kugelfunktionen negativer Ordnung sind.

Es sei

$$\chi_n = A \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{n+1} \cos i\omega P_{ni} \quad ,$$

dann wird:

$$\psi_0 = \frac{\omega}{\varkappa} A\varrho \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{n+1} \frac{i}{n} \sin i\omega P_{ni} \quad .$$

Setzen wir nun

$$\psi = \frac{\omega}{\varkappa} A\varrho \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{n+1} \frac{i}{n} (f_1 \sin i\omega + f_2 \cos i\omega) P_{ni} \quad ,$$

so wird die von ψ induzierte Funktion ψ':

$$\psi' = -\left(\frac{\omega}{\varkappa}\right)^2 A\varrho \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{n+1} \frac{i^2}{n} (F_1 \cos i\omega - F_2 \sin i\omega) P_{ni} \quad .$$

Dabei ist aber der Zusammenhang zwischen f und F ein etwas anderer, als früher; es ist nämlich gesetzt:

$$F(\varrho) = \frac{4\pi}{2n+1} \left\{ \int_r^{\varrho} afada + \int_{\varrho}^{R} \frac{\varrho^{2n+1}}{a^{2n}} fada \right\} \quad .$$

Die Bedingung

$$\psi = \psi_0 + \psi'$$

liefert wieder die Gleichungen:

$$f_1 = 1 + \frac{i\omega}{\varkappa} F_2$$

$$f_2 = -\frac{i\omega}{\varkappa} F_1 \quad .$$

Digitized by Google

Unter Benutzung derselben Abkürzungen, wie früher, werden dieselben:

$$\varphi_1 \sigma = 1 + \frac{1}{2n+1}\left\{\int_s^\sigma a\varphi_2(a)da + \int_\sigma^S \sigma^{2n+1} a^{-2n}\varphi_2 ada\right\}$$

$$\varphi_2 \sigma = -\frac{1}{2n+1}\left\{\int_s^\sigma a\varphi_1 ada + \int_\sigma^S \sigma^{2n+1} a^{-2n}\varphi_1 ada\right\} .$$

Differentiiert geben diese:

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\sigma^{2n+2}\frac{d}{d\sigma}(\sigma^{-2n-1}\varphi_1)\right) = -\sigma\varphi_2$$

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\sigma^{2n+2}\frac{d}{d\sigma}(\sigma^{-2n-1}\varphi_2)\right) = \sigma\varphi_1 ,$$

oder:

$$\varphi_1'' - \frac{2n}{\sigma}\varphi_1' = -\varphi_2$$

$$\varphi_2'' - \frac{2n}{\sigma}\varphi_2' = \varphi_1 .$$

Setzt man $\varphi = \sigma^{2n+1}\bar{\varphi}$, so folgen für die $\bar{\varphi}$ die Gleichungen:

$$\bar{\varphi}_1'' + \frac{2n+2}{\sigma}\bar{\varphi}_1' = -\bar{\varphi}_2$$

$$\bar{\varphi}_2'' + \frac{2n+2}{\sigma}\bar{\varphi}_2' = \bar{\varphi}_1 ,$$

also Gleichungen, welche wieder auf die p_n und q_n führen.

Die Bestimmung der Konstanten läfst sich dann ganz analog der früheren ausführen und es wird erhalten:

$$\varphi_1\sqrt{-1} - \varphi_2$$

$$= -2(n+1)(2n+1)\frac{\sigma^{2n+1}}{s^{2n+3}} \cdot$$

$$\frac{q_{n-1}(\lambda S)q_n(-\lambda\sigma) - q_{n-1}(-\lambda S)q_n(\lambda\sigma)}{q_{n-1}(\lambda S)q_{n+1}(-\lambda s) - q_{n-1}(-\lambda S)q_{n+1}(\lambda s)} .$$

Digitized by Google

Besonders einfach wird die Formel für den Fall, dafs $S\infty$ ist, es sich also um einen kugelförmigen Hohlraum in einer unbegrenzten Masse handelt.

Dann wird $q_{n-1}(\lambda S) = 0$, und also wird

$$\varphi_1\sqrt{-1} + \varphi_2 = -2(n+1)(2n+1)\frac{\sigma^{2n+1}}{s^{2n+3}}\cdot\frac{q_n(\sigma\lambda)}{q_{n+1}(s\lambda)} \quad .$$

Kann man $\mu\varrho = \sigma$ wegen des sehr kleinen Wertes von ω gegen die Einheit vernachlässigen, so kann man für die q_n ihre Werte für kleine Argumente (Seite 82) setzen und erhält dann:

$$\varphi_1\sqrt{-1} + \varphi_2 = \lambda^2 e^{-\lambda(\sigma-s)} \quad ,$$

oder, da wir die Gröfsen von der Ordnung σ schon zum Teil vernachlässigt haben:

$$\varphi_1\sqrt{-1} + \varphi_2 = \lambda^2 = \sqrt{-1}$$

$$\varphi_1 = 1 \quad , \quad \varphi_2 = 0 \quad ,$$

wie es sein mufs.

Verschwindet andererseits die Einheit gegen $\mu\varrho$, und ersetzt man demgemäfs die q_n durch ihre Näherungswerte für grofse Argumente (Seite 82), so erhält man:

$$\varphi_1 + \varphi_2\sqrt{-1} = (2n+1)\left(\frac{\varrho}{r}\right)^n \frac{1}{s\lambda} e^{-\lambda(\sigma-s)} \quad .$$

Daraus ergeben sich ähnliche Erscheinungen, wie an der Vollkugel, die Drehung beträgt $45^0/i$ an der innersten Schicht und wächst mit wachsendem ϱ ins Unendliche.

Für ψ findet man

$$\psi = \frac{2n+1}{2n} A \sqrt{\frac{i\omega}{\varkappa\pi}}\, e^{-\frac{\mu}{\sqrt{2}}(\varrho-r)} \sin\left(i\omega - \frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{\sqrt{2}}(\varrho - r)\right) \quad ,$$

welche Form der für die Vollkugel erhaltenen ganz analog ist.

Zur Vernachlässigung der Selbstinduktion.

Man erkennt übrigens, dafs schon bei den kleinsten Drehungsgeschwindigkeiten im unbegrenzten Raume ϱ so gross gewählt werden kann, dafs die gemachten Annäherungen zulässig sind, es wird daher auch schon bei den kleinsten ω die In-

Digitized by Google

duktion alle möglichen Winkel durchlaufen, allerdings in Entfernungen, in welchen die Intensität sehr klein ist.

Ich erinnere hier an die Bemerkung, welche wir schon auf Seite 65 betreffs der Vernachlässigung der Selbstinduktion gemacht haben.

Es würde ein Leichtes sein, die für Hohlkugeln gewonnenen Resultate auf ebene Platten von endlicher Dicke auszudehnen; um Weitläufigkeiten zu vermeiden, verzichte ich hierauf. Das Wesentliche der Erscheinung läfst sich übrigens ohne Rechnung aus dem Besprochenen abnehmen.

§ 5. Kräfte, welche die induzierten Strömungen ausüben.

Es sollen jetzt die von den induzierten Strömungen ausgeübten Kräfte und die von denselben erzeugte Wärme berechnet werden. Der letzteren ist die Arbeit gleich, welche geleistet werden mufs, um die Rotation zu erhalten.

A. Das Potential der induzierten Strömungen.

Das Potential der induzierten Ströme.

1. Wir berechnen dasselbe zunächst für den äufseren Raum. Der Teil, welcher von der zwischen $\varrho = a$ und $\varrho = a + da$ liegenden Kugelschicht herrührt, ist

Wert desselben im äufseren Raume.

$$d\Omega_a = \frac{4\pi n}{2n+1} \left(\frac{a}{\varrho}\right)^{n+1} \psi_{ni}(a)\, da \quad ,$$

wenn wir das Glied ψ_{ni} der gesamten Strömungsfunktion ψ betrachten.

Nun ist

$$\psi(a)\, da = -A \frac{\omega}{\varkappa} a \left(\frac{a}{R}\right)^n \frac{i}{n+1} (f_1 a \sin i\omega + f_2 a \cos i\omega) P_{ni} da \quad .$$

Setzt man diesen Wert in $d\Omega$ ein, und versucht die Integration nach den a auszuführen, so trifft man auf die Integrale:

$$\int_r^R a^{2n+2} f(a)\, da \quad .$$

Man hat aber:

$$\int_r^R a^{2n+2} f_1\, a da = \frac{(2n+1) R^{2n+1}}{4\pi} F_1(R)$$

Digitized by Google

nach der Definition für F (Seite 73);

$$= -\frac{(2n+1)\varkappa}{4\pi i\omega} f_2(R)$$

nach den Gleichungen, welchen $f_1 f_2 F_1 F_2$ genügen (Seite 74); und ebenso:

$$\int_r^R a^{2n+2} f_2\, a\,da = \frac{(2n+1)R^{2n+1}}{4\pi} F_2(R)$$

$$= -\frac{(2n+1)\varkappa}{4\pi i\omega}\left(1 - f_1(R)\right) .$$

Mit Benutzung dieser Ausdrücke findet man:

$$\Omega_a = \frac{n}{n+1} A \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} (f_2 R \sin i\omega + (1 - f_1 R)\cos i\omega) P_{ni} .$$

Für sehr kleine Drehungsgeschwindigkeiten ist $f_2 = 0$, $f_1 = 1$, also $\Omega = 0$;

für sehr grofse ist $f_1 = f_2 = 0$, also an der Oberfläche der Hohlkugel:

$$\overline{\Omega} = \frac{n}{n+1} \overline{\chi}_n .$$

Wert im Hohlraume.

2. In ganz derselben Weise lassen sich die Rechnungen für den inneren Raum der Hohlkugel ausführen, man findet:

$$\Omega_i = -\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n A \{f_2 r \sin i\omega + (1 - f_1 r)\cos i\omega\} P_{ni} ,$$

also für das Gesamtpotential:

$$\Omega_i + \chi_n = A \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \{f_1 r \cos i\omega - f_2 r \sin i\omega\} P_{ni} .$$

Für verschwindende Drehungsgeschwindigkeiten wird dieser Ausdruck $= \chi$, für grofse $= 0$, genauer findet sich für grofse μ aus einer Formel, welche wir schon früher angewandt haben (Seite 86):

$$f_1 r + f_2 r\sqrt{-1} = \frac{2(2n+1)}{\lambda\mu}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{1}{e^{\lambda(S-s)} - e^{-\lambda(S-s)}}$$

$$= 2(2n+1)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{1}{\lambda\mu} e^{-\lambda\mu(R-r)} .$$

Digitized by Google

Daraus folgt dann:

$$\Omega_i + \chi_n$$

$$= A \frac{2(2n+1)}{\mu r} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^n e^{-\frac{\mu}{\sqrt{2}}(R-r)} \cos\left(i\omega - \frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{\sqrt{2}}(R-r)\right) P_{ni} \quad .$$

Eigentümliches Verhalten der magnetischen Kräfte im Hohlraume.

Es nimmt also das Potential im Innern bei wachsender Geschwindigkeit aufserordentlich schnell ab, gleichzeitig aber haben seine Niveauflächen die Eigentümlichkeit, um einen der Rotationsgeschwindigkeit proportionalen Winkel gedreht zu erscheinen; die durch das Potential bedingten Kräfte nehmen also bei allmählich wachsender Geschwindigkeit nach und nach alle Richtungen der Windrose an, und zwar bei beliebig wachsender Geschwindigkeit beliebig oft.

Erzeugte Wärme.

B. Erzeugte Wärme.

Es sei R der Radius einer sehr dünnen Kugelschale, es herrsche in derselben die Strömungsfunktion:

$$\psi = \sum \psi_n \quad .$$

Der Widerstand der Schale sei k, es wird die in ihr erzeugte Wärme W gesucht.

Wärmeerzeugung in einer Kugelschale.

Wir bestimmen die u, v, w, welche zu ψ gehören, speciell diejenigen, welche zu dem Gliede

$$\psi_{ni} = A \sin i\omega \, P_{ni}$$

gehören. Sind $u\,v\,w$ gefunden, so folgt die erzeugte Wärme:

$$W = k \int (u^2 + v^2 + w^2)\, ds \quad ,$$

das Integral über die ganze Kugelfläche ausgedehnt.

Führen wir die Bezeichnungen Ω und Θ ein für die Strömungen längs der Breiten- und Meridiankreise in Richtung der wachsenden ω und θ, so haben wir:

$$\Omega = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

$$\Theta = -\frac{1}{R \sin \theta} \frac{d\psi}{\partial \omega}$$

Digitized by Google

$$u = \Theta \cos\theta \cos\omega + \Omega \sin\omega$$

$$v = \Theta \cos\theta \sin\omega - \Omega \cos\omega$$

$$w = -\Theta \sin\theta \quad .$$

Setzt man hierin den angeführten Wert von ψ'_{ni} ein, so erhält man:

$$u = \frac{A}{R}\{-\cos i\omega \cos\omega\,(iP_{ni}\operatorname{cotg}\theta) + \sin i\omega \sin\omega P'_{ni}\}$$

$$v = \frac{A}{R}\{-\cos i\omega \sin\omega\,(iP_{ni}\operatorname{cotg}\theta) - \sin i\omega \cos\omega P'_{ni}\}$$

$$w = \frac{A}{R} i \cos i\omega P_{ni} \quad .$$

Nun ist aber:

$$iP_{ni}\operatorname{cotg}\theta = \tfrac{1}{2}\{P_{n,i+1} + (n+i)(n-i+1)P_{n,i-1}\}$$

$$P'_{ni} = \tfrac{1}{2}\{-P_{n,i+1} + (n+i)(n-i+1)P_{n,i-1}\} \quad .$$

Durch Einsetzung dieser Werte in $u\,v\,w$ folgt:

$$u = -\frac{A}{2R}\{\cos(i+1)\omega P_{n,i+1} + (n+i)(n-i+1)\cos(i-1)\omega P_{n,i-1}\}$$

$$v = -\frac{A}{2R}\{\sin(i+1)\omega P_{n,i+1} - (n+i)(n-i+1)\sin(i-1)\omega P_{n,i-1}\}$$

$$w = \frac{A}{R} i \cos i\omega P_{ni} \quad .$$

Hierdurch sind die $u\,v\,w$ nach Kugelflächenfunktionen entwickelt. In gleicher Form denken wir uns die $u\,v\,w$ für alle Glieder bestimmt, und den Ausdruck

$$\int (u^2 + v^2 + w^2)\, ds$$

gebildet. Bei der Integration geben diejenigen Glieder, welche Produkte aus Kugelfunktionen verschiedener Ordnung sind, das

Digitized by Google

Resultat 0; wir können also für jedes ψ_n das entsprechende W_n besonders bestimmen und die Resultate addieren. Eine nähere Betrachtung zeigt dann, dafs wir auch für jedes ψ_{ni} die Wärme besonders berechnen und die Resultate addieren können. Es werden allerdings nicht alle Integrale, welche Kombinationen aus verschiedenen ψ_i entsprechen, gleich Null werden; aber die Integrale in $\int u^2\,ds$, für welche dies eintritt, werden sich gegen ihnen gleiche in $\int v^2\,ds$ aufheben.

Für das oben angegebene ψ_{ni} erhalten wir nun:

$$W_{ni} = k\int(u^2 + v^2 + w^2)\,ds$$

$$= \frac{kA^2}{2R^2}\Big\{\int(\cos(i+1)\,\omega P_{ni})^2\,ds$$

$$+ (n+i)^2(n-i+1)^2\int(\cos(i-1)\,\omega P_{n,i-1})^2\,ds$$

$$+ 2i^2\int(\cos i\omega P_{ni})^2\,ds\Big\}\quad,$$

was nach bekannten Formeln und einfachen Reduktionen ergiebt:

$$W_{ni} = kA^2\cdot\frac{2\pi n(n+1)}{2n+1}(n-i+1)(n-i+2)\ldots(n+i)$$

$$= kA^2(n,i)\quad,$$

wo jetzt (n,i) eine leicht verständliche Abkürzung ist. Da wir weiter haben:

$$W = \sum_n\sum_i W_{ni}\quad,$$

so ist unsere Aufgabe gelöst. Man erkennt leicht, dafs dem Resultate die Formen gegeben werden können:

$$W = \frac{k}{R^2}\sum_n n(n+1)\sum_i\int\psi^2_{ni}\,ds$$

oder:

$$W = \frac{k}{R^2}\sum_n n(n+1)\int\psi^2_n\,ds\quad.$$

Der vorliegende Satz hätte, vielleicht einfacher, mittels einer aus dem GREEN'schen Satze abgeleiteten Betrachtung

Digitized by Google

bewiesen werden können; in dem hier gegebenen Beweise sind implicite die Formeln enthalten:

Analytische Formeln.

$$\int\left\{\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial\omega_x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial\omega_y}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial\omega_z}\right)^2\right\}ds=n(n+1)\int\psi_n^2\,ds\quad,$$

$$\frac{\partial}{\partial\omega_x}(\sin i\omega P_{ni})$$

$$=-\tfrac{1}{2}\cos(i+1)\omega P_{n,i+1}-\tfrac{1}{2}(n+i)(n-i+1)\cos(i-1)\omega P_{n,i-1},$$

$$\frac{\partial}{\partial\omega_y}(\sin i\omega P_{ni})$$

$$=-\tfrac{1}{2}\sin(i+1)\omega P_{n,i+1}+\tfrac{1}{2}(n+i)(n-i+1)\sin(i-1)\omega P_{n,i-1},$$

$$\frac{\partial}{\partial\omega_z}(\sin i\omega P_{ni})=i\cos i\omega P_{ni}\quad,$$

an welche sich leicht ähnliche anschliefsen lassen. Beziehen sich ω, θ und ω', θ' auf Polarkoordinatensysteme mit verschiedenen Axen, so erlauben die zuletzt angeführten Gleichungen, Integrale von der Form

$$\int\cos i\omega P_{ni}(\theta)\cos j\omega' P_{nj}(\theta')\,ds'\quad,$$

(in welchen die ω', θ' als die Integrationsvariabelen betrachtet sind) aus dem bekannten

$$\int P_{n0}(\theta)\cos j\omega' P_{nj}(\theta')\,ds'=\frac{4\pi}{2n+1}\cos j\omega P_{nj}(\theta)$$

abzuleiten, allerdings im allgemeinen nur mittels weitläufiger Rechnungen.

Wärmeerzeugung in der rotierenden Kugel.

Ich bestimme jetzt die in der rotierenden Kugel durch das Glied χ_{ni} der induzierenden Potentialfunktion erzeugte Wärme. Zu χ_{ni} gehört:

$$\psi_{ni}=-\frac{\omega}{\varkappa}AQ\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n\frac{i}{n+1}(f_1\sin i\omega+f_2\cos i\omega)P_{ni}\quad,$$

also die Wärme

$$W_{ni}=\frac{\omega^2}{\varkappa}A^2\frac{i^2(n,i)}{(n+1)^2}\int_r^R\left(\frac{\varrho}{R}\right)^{2n}(f_1^2+f_2^2)\varrho^2\,d\varrho\quad.$$

Digitized by Google

Das Integral kann ausgeführt werden für kleine und für grofse Drehungsgeschwindigkeiten. Für erstere ist $f_1 = 1$, $f_2 = 0$, und es wird daher die erzeugte Wärme in diesem Falle:

Bei kleinen Geschwindigkeiten.

$$W_{ni} = A^2 \frac{R^3 \omega^2}{\varkappa} \cdot \frac{i^2 (n, i)}{(n+1)^2 (2n+3)} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{2n+3}\right) .$$

Für sehr grofse Drehungsgeschwindigkeiten hingegen war

Bei grofsen Geschwindigkeiten.

$$f_1^2 + f_2^2 = \frac{(2n+1)^2}{\mu^2} \frac{R^{2n}}{\varrho^{2n}} e^{-\mu\sqrt{2}(R-\varrho)} .$$

Es wird daher das in W_{ni} vorkommende Integral, welches von $r = 0$ an genommen werden kann, gleich

$$\int_0^R \frac{(2n+1)^2}{\mu^2} e^{-\mu\sqrt{2}(R-\varrho)} d\varrho$$

$$= \frac{(2n+1)^2}{\mu^3 \sqrt{2}} ,$$

da $R\mu$ als sehr grofs betrachtet wird. Wir erhalten sonach für sehr grofse ω:

$$W_{ni} = A^2 \frac{(2n+1)^2 (n, i)}{8 (n+1)^2} \sqrt{\frac{\varkappa \omega i}{2\pi^3}} .$$

W ist von R noch insofern abhängig, als dasselbe in A enthalten ist.

Die entwickelte Wärme wächst also ins Unendliche mit wachsendem ω[1]), und zwar wie $\sqrt{\omega}$. Das gleiche gilt von der zur Erhaltung der Rotation erforderten Arbeit. Bilden die induzierenden Magnete ein fest verbundenes System, so wird demselben ein Drehungsmoment um die Rotationsaxe erteilt, welches sich aus der erzeugten Wärme berechnen läfst. Denkt man sich nämlich die Kugel ruhend, die äufseren Magnete rotierend mit der Winkelgeschwindigkeit ω, so leistet das Drehungsmoment D, welches die Bewegung erhält, in der

[1]) Wegen des scheinbaren Widerspruches mit dem für ∞ dünne Kugelschalen erhaltenen Resultate gilt die Bemerkung auf Seite 88.

Digitized by Google

Zeiteinheit die Arbeit $2\pi\omega D$, diese Arbeit ist gleich der erzeugten Wärme, also

$$D = \frac{W}{2\pi\omega} .$$

Drehungsmoment, welches auf die induzierenden Magnete ausgeübt wird.

Es ist aber dies Drehungsmoment gleich demjenigen, welches umgekehrt die rotierende Kugel den ruhenden Magneten erteilt. Man erkennt leicht, dafs für kleine ω D proportional mit $\omega/\varkappa$ wächst, für grofse ω nimmt es ab mit wachsendem ω, und zwar ist es proportional mit $\sqrt{\varkappa/\omega}$, schliefslich wird es unendlich klein. (Das hindert nicht, dafs es eine Arbeit von der Ordnung $\sqrt{\omega}$ leistet.) Andererseits sahen wir schon, dafs bei unendlichen ω die auf die induzierenden Magnete ausgeübten Kräfte endlich sind, da dieselben nun ein Drehungsmoment um die Rotationsaxe nicht hervorrufen, so müssen ihre Resultanten in einer durch die Axe gelegten Ebene wirken.

In der That verhält sich bei unendlichen ω die Kugel zu den äufseren Magneten ähnlich, wie eine leitende Kugel zu elektrischen Massen; eine leitende Kugel kann aber induzierenden Massen keine Rotation um eine durch ihren Mittelpunkt gehende Axe erteilen.

§ 6. Rotation magnetischer Kugeln.

Ich mache jetzt die Annahme, dafs die Masse der Kugel fähig sei, magnetische Polarität anzunehmen. Von dem Vorhandensein einer Koercitivkraft sehe ich ab.

Zunächst sind die für diesen Fall geltenden Formen der elektromotorischen Kräfte zu bilden. Nach Anleitung des § 1,6 haben wir, um die Wirkung der Magnetismen zu erhalten, in den allgemeinen Formeln für die elektromotorischen Kräfte zu ersetzen:

$$U \text{ durch } \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} ,$$

$$V \text{ durch } \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} ,$$

$$W \text{ durch } \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} .$$

Digitized by Google

Danach ist weiter zu ersetzen:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \text{ durch } \Delta \dot{N} + \frac{\partial \chi}{\partial z} \quad , \\
&\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \text{ durch } \Delta M + \frac{\partial \chi}{\partial y} \quad , \qquad 1) \\
&\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \text{ durch } \Delta L + \frac{\partial \chi}{\partial x} \quad ,
\end{aligned}$$

da

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = -\chi \text{ ist.} \qquad 2)$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}
\Delta L &= -4\pi\lambda \\
\Delta M &= -4\pi\mu \qquad 3) \\
\Delta N &= -4\pi\nu \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda}{\theta} &= \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial x} \\
\frac{\mu}{\theta} &= \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial y} \qquad 4) \\
\frac{\nu}{\theta} &= \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial \chi}{\partial z} \quad .
\end{aligned}$$

Indem man hiernach L, M, N aus den Ausdrücken 1) eliminiert, und die von den Strömen direkt ausgeübten Kräfte $\partial V/\partial x - \partial U/\partial y$ etc. addiert, erhält man für die Ausdrücke, welche jetzt an Stelle der $\partial V/\partial x - \partial U/\partial y$ etc. zu treten haben, die folgenden: Die Differentialgleichungen.

$$\begin{aligned}
&(1 + 4\pi\theta)\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial z}\right) \\
&(1 + 4\pi\theta)\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial \chi}{\partial y}\right) \qquad 5) \\
&(1 + 4\pi\theta)\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial x}\right) \quad .
\end{aligned}$$

Digitized by Google

In denselben bedeutet χ das Gesamtpotential. Dasselbe besteht aber:

1. aus dem gegebenen äufseren Potential der induzierenden Magnete,

2. aus dem Eigenpotential χ_0 der magnetisierten Kugel. Für das letztere gelten die Bedingungen:

Im Innern

$$6) \qquad \Delta\chi_0 = 0 \ ,$$

wie aus Gleichung 2) und 4) folgt; an der Grenze:

$$7) \qquad 4\pi\theta N_\varrho = (1 + 4\pi\theta)\frac{\partial\chi_{0i}}{\partial\varrho} - \frac{\partial\chi_{0a}}{\partial\varrho} \ ,$$

wenn N_ϱ die von den äufseren Magnetismen und den induzierten Strömungen in Richtung des Radius ausgeübte Kraft ist.

In Worten kann man die Wirkung der Polarisierbarkeit des Mediums so aussprechen:

Die Polarisierbarkeit verändert einmal die magnetisierenden Kräfte im Innern in der Weise, wie dies die allgemeine Theorie des Magnetismus angiebt; sie vergröfsert zweitens die von den magnetisierenden Kräften verursachten Wirkungen im Verhältnis $1 + 4\pi\theta$. Beide Teile der Wirkung haben entgegengesetzte Tendenz; der Erfolg ist, dafs die Wirkung auch für sehr grofse θ nur in endlichem Verhältnis vergröfsert erscheint.

Vernachlässigung der Selbstinduktion.

Es werde wieder zunächst von der Selbstinduktion abgesehen. Es mufs aber bemerkt werden, dafs dies nur dann erlaubt ist, wenn

$$R\sqrt{\frac{4\pi\omega(1+4\pi\theta)}{\varkappa}}$$

sehr klein ist; bei grofsen θ und R mufs ω, auch absolut betrachtet, sehr klein sein, um diese Bedingung zu erfüllen.

Ist das äufsere Potential

$$\chi_n = A\varrho^n Y_n \ ,$$

so kann das Eigenpotential der Hohlkugel in der Form dargestellt werden:

$$\chi_0 = \left(C + \frac{Br^{2n+1}}{\varrho^{2n+1}}\right)\chi_n$$

Digitized by Google

und also das Gesamtpotential in der Form:

$$\chi = \left(A + B\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{2n+1}\right)\chi_n \quad .$$

Nach dem Vorigen verhält sich nun die magnetische Hohlkugel genau so, wie eine nicht polarisierbare von gleichem Widerstande, welche unter dem Einflusse des Potentiales

$$(1 + 4\pi\theta)\left(A + B\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{2n+1}\right)\chi_n$$

steht.

Da dies Potential aus zwei Kugelfunktionen besteht, so lassen sich die Strömungen nach dem Vorigen als bekannt ansehen.

Für die Strömungsfunktion erhalten wir:

$$\psi = -\frac{\omega}{\varkappa}(1+4\pi\theta)\left(\frac{A}{n+1} - \frac{B}{n}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{2n+1}\right)\varrho\frac{\partial\chi_n}{\partial\omega} \quad .$$

Wären alle Umstände dieselben, nur $\theta = 0$, so würden wir für die Strömungsfunktion ψ_0 erhalten haben

$$\psi_0 = -\frac{\omega}{\varkappa}\frac{\varrho}{n+1}\frac{\partial\chi_n}{\partial\omega} \quad .$$

Durch Division folgt:

$$\psi = (1 + 4\pi\theta)\left(A - \frac{n+1}{n}B\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{2n+1}\right)\psi_0 \quad .$$

Die Form der Strömungen in den einzelnen Schichten ist also nicht geändert, nur ist die Intensität anders verteilt. Es wird bequem sein, die Erscheinungen durch Vergleichung von ψ mit ψ_0 zu beschreiben. Die Gröfsen A und B sind durch die Gleichungen 6) 7) gegeben, setzt man $r/R = \varepsilon$, so werden sie gefunden:

$$A = \frac{(2n+1)\{(2n+1)(1+4\pi\theta) - 4\pi\theta n\}}{n(n+1)16\pi^2\theta^2(1-\varepsilon^{2n+1}) + (2n+1)^2(1+4\pi\theta)}$$

$$B = \frac{4\pi\theta n(2n+1)}{n(n+1)16\pi^2\theta^2(1-\varepsilon^{2n+1}) + (2n+1)^2(1+4\pi\theta)} \quad .$$

Digitized by Google

Besondere Fälle:

Da diese Ausdrücke eine leichte Übersicht nicht gestatten, so sollen dieselben auf vereinfachte Fälle angewandt werden.

θ sehr klein.

1. Es sei θ sehr klein. Dann wird durch Entwickelung:

$$A = 1 - \frac{n}{2n+1} 4\pi\theta$$

$$B = \frac{n}{2n+1} 4\pi\theta \quad ,$$

also

$$\psi' = \psi'_0 + \frac{n+1}{2n+1} 4\pi\theta \left(1 - \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{2n+1}\right) \psi'_0 \quad .$$

Die Intensität der Strömung erscheint also an der Innenfläche der Hohlkugel gar nicht verändert, in den übrigen Teilen der Kugel erscheint sie überall verstärkt, wenn θ positiv ist. Die Verstärkung ist mit θ proportional. In diamagnetischen Kugeln ist die Intensität überall schwächer als in unmagnetischen. Die Drehung magnetischer Kugeln erfordert mehr, die diamagnetischer weniger Arbeit, als die unmagnetischer.

θ sehr grofs.

2. Es sei θ sehr grofs, und nicht gleichzeitig ε sehr nahe an 1. Dann wird

$$A = \frac{2n+1}{4\pi\theta n\,(1-\varepsilon^{2n+1})}$$

$$B = \frac{2n+1}{4\pi\theta\,(n+1)\,(1-\varepsilon^{2n+1})}$$

und also

$$\psi = \frac{2n+1}{n} \frac{1 - \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{2n+1}}{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{2n+1}} \psi_0 \quad .$$

Es ist also hier die Strömung in der innersten Schicht gleich Null, wächst dann aber rasch nach aufsen und wird in der Grenzfläche $(2n + 1)/n$ mal so stark, als in der nichtmagnetischen Kugel. Ist θ überhaupt grofs, so ist die Verstärkung der Strömung von seinem absoluten Werte nahezu unabhängig.

Digitized by Google

3. Es sei ε unendlich nahe gleich 1. Dünne Hohlkugel.
Dann wird

$$A = \frac{(2n+1)(1+4\pi\theta) - 4\pi\theta n}{(2n+1)(1+4\pi\theta)}$$

$$B = \frac{4\pi\theta n}{(2n+1)(1+4\pi\theta)} \quad ,$$

also wird

$$\psi = \frac{2n+1}{2n+1}\psi_0 = \psi_0 \quad .$$

In unendlich dünnen Hohlkugeln ist die Magnetisierbarkeit ohne Einfluſs auf die induzierten Strömungen (obgleich die Polarisationen nicht verschwinden, und die magnetisierenden Kräfte in der Schale Änderungen erleiden). Ich bemerke gleich, daſs dies Resultat Gültigkeit behalten wird, auch dann, wenn auf die Selbstinduktion Rücksicht genommen wird.

4. Es sei $\varepsilon = 0$, das ist der Fall in der Vollkugel. Vollkugel.
Das Glied mit negativem Exponenten von ϱ fällt fort; es wird erhalten:

$$A = \frac{1}{1 + \frac{4\pi\theta n}{2n+1}} \quad ,$$

$$\psi = \frac{1+4\pi\theta}{1 + \frac{n}{2n+1}4\pi\theta}\psi_0 \quad .$$

Für groſse θ folgt daraus:

$$\psi = \frac{2n+1}{n}\psi_0 \quad .$$

Die Gröſse $(2n+1)/n$ liegt zwischen 2 und 3. In Eisenkugeln sind die Strömungen also 2 bis 3 mal stärker als in einem gleich gut leitenden, nicht magnetischen Metalle; die entwickelte Wärme, die gebrauchte Arbeit und bewirkte Dämpfung sind 4 bis 9 mal gröſser als in jenem.

5. Ebene Platten. Ebene Platten.
Eine sehr dünne ebene Platte kann als Teil einer sehr dünnen Hohlkugel angesehen werden, für eine solche ist daher

$$\psi = \psi_0 \quad .$$

Digitized by Google

Eine sehr dicke Platte kann als Teil einer unendlichen Vollkugel angesehen werden, für eine solche ist, da n sehr grofs zu setzen ist:

$$\psi = \frac{1+4\pi\theta}{1+2\pi\theta}\psi_0 \quad .$$

In beiden Grenzfällen bleibt auch die gesamte Strömungsform ungeändert; in dem zuletzt genannten ist bei grofsen θ die Intensität durch die Magnetisierbarkeit verdoppelt.

Bei mittleren Dicken der Platten gelten mittlere Werte; die Rechnungen lassen sich leicht durchführen, geben aber keine sehr einfachen Resultate, weshalb sie hier wegbleiben mögen.

Berücksichtigung der Selbstinduktion.

Es werde jetzt die Selbstinduktion in Betracht gezogen, jedoch sollen die Rechnungen nur für Vollkugeln durchgeführt werden. Analytische Schwierigkeiten besonderer Natur bieten auch Hohlkugeln nicht, die Rechnungen werden aber äufserst kompliziert.

Beschränkung auf Vollkugeln.

Wir finden die Strömung durch folgende Überlegungen: Sei das induzierende Potential

$$\chi_{ni} = A\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \cos i\omega P_{ni} \quad .$$

Sei ψ_0 die von χ_{ni} direkt induzierte Strömungsfunktion, dann ist:

$$\psi_0 = -\frac{1+4\pi\theta}{1+\frac{n}{2n+1}4\pi\theta}\cdot\frac{\omega}{\varkappa}A\varrho\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n\frac{i}{n+1}\sin i\omega P_{ni} \quad .$$

Sei

$$\psi = -\frac{\omega}{\varkappa}A\varrho\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n\frac{i}{n+1}(f_1\sin i\omega + f_2\cos i\omega)P_{ni}$$

die thatsächlich stattfindende Strömungsfunktion. Es handelt sich darum, die von dieser induzierte Strömung zu finden. Hierzu ist zunächst die Kenntnis des von ψ in der magnetischen Masse induzierten Potentiales χ_θ erforderlich.

Die von der Strömungsfunktion

$$\psi = \varrho\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n f(\varrho)\, Y_n$$

Digitized by Google

in Richtung des Radius ausgeübte magnetische Kraft ist

$$N_\varrho = \frac{x}{\varrho}\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) + \frac{y}{\varrho}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) + \frac{z}{\varrho}\left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{O}{\varrho} \quad \text{(Seite 67)}$$

$$= -\frac{n(n+1)}{\varrho} F\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n Y_n \quad , \quad \text{(Seite 69)}$$

wenn F und f den auf Seite 73 angegebenen Zusammenhang haben.

Hieraus und aus den Bedingungsgleichungen für χ_θ (Gleichung 6) 7) Seite 100) ergiebt sich χ_θ im allgemeinen und in unserem speziellen Falle, und wir erhalten für letzteren:

$$\chi_\theta = \frac{4\pi\theta n(n+1)}{2n+1+4\pi\theta n}$$

$$\cdot \frac{\omega}{\varkappa} A \frac{i}{n+1}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \{F_1(R)\sin i\omega + F_2(R)\cos i\omega\} P_{ni} \quad .$$

Verstehen wir nun unter ψ' diejenige Strömungsfunktion, welche ψ und χ_θ zusammen in der unmagnetischen Kugel erzeugen würden, so veranlassen sie in der magnetischen Masse die Funktion

$$\psi'_\theta = (1 + 4\pi\theta)\psi' \quad ,$$

und die Bedingung des stationären Zustandes wird werden:

$$\psi = \psi_0 + \psi'_\theta \quad .$$

ψ' ist genau so zu bilden, wie früher, also ist auch ψ'_θ bekannt. Setzt man die Werte von ψ, ψ_0, ψ'_θ in die letzte Gleichung ein und macht die Koefficienten von $\cos i\omega$ und $\sin i\omega$ einzeln der Null gleich, so folgen für die f_1, f_2, F_1 und F_2 die Gleichungen:

$$f_1(\varrho) = \frac{(2n+1)(1+4\pi\theta)}{2n+1+4\pi\theta n} - \frac{\omega i}{\varkappa}\frac{4\pi\theta n(1+4\pi\theta)}{2n+1+4\pi\theta n} F_2(R) + \frac{\omega i}{\varkappa}(1+4\pi\theta)F'_2(\varrho)$$

Digitized by Google

$$f_2(\varrho) = \frac{\omega i}{\varkappa} \frac{4\pi\theta n(1+4\pi\theta)}{2n+1+4\pi\theta n} F_1(R) - \frac{\omega i}{\varkappa}(1+4\pi\theta) F_1(\varrho) \quad .$$

Setzt man hier

$$\frac{4\pi i\omega(1+4\pi\theta)}{\varkappa} = \mu^2$$

$$f_1(\varrho) = \varphi_1(\mu\varrho) = \varphi_1\sigma$$

$$f_2(\varrho) = \varphi_2(\mu\varrho) = \varphi_2\sigma \quad ,$$

so werden für die φ_1 und φ_2 hier genau dieselben Differentialgleichungen erhalten, wie früher (Seite 76). Da wir eine Vollkugel behandeln, brauchen wir nur diejenigen Lösungen beizubehalten, welche im Mittelpunkte endlich sind; wir können also setzen:

$$\varphi_1 = Ap_n(\lambda_1\sigma) + Bp_n(\lambda_2\sigma)$$

$$\varphi_2 = -\lambda_1^2 Ap_n(\lambda_1\sigma) - B\lambda_2^2 p_n(\lambda_2\sigma)$$

$$\lambda = \lambda_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}(1+\sqrt{-1})$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}(1-\sqrt{-1}) \quad .$$

Die Bestimmung der Konstanten hat hier genau nach derselben Methode zu geschehen, wie oben. Die Integrale, welche zu bilden sind, sind nicht verschieden von den früheren, nur durch die Weitläufigkeit der Konstanten wird die Rechnung etwas verwickelter. Das Resultat aber ist ein relativ einfaches, es wird gefunden:

Die Lösung.

$$f_1\varrho + f_2\varrho\sqrt{-1} = \frac{(2n+1)(1+4\pi\theta)p_n(\lambda\mu\varrho)}{2np_{n-1}(\lambda\mu R) + 4\pi\theta n p_n(\lambda\mu R)} \quad .$$

Vergleich mit früheren Resultaten.

Wir verifizieren zunächst dies Resultat. Für verschwindende θ giebt es

$$f_1 + f_2\sqrt{-1} = \frac{2n+1}{2n}\frac{p_n(\lambda\mu\varrho)}{p_{n-1}(\lambda\mu R)} \quad ,$$

was mit dem für unmagnetische Vollkugeln erhaltenen (Seite 80) übereinstimmt.

Digitized by Google

Für verschwindende ω ergiebt es ferner, da

$$p_n(0) = \frac{2^{n+1}\,n!}{1.3\ldots 2n+1}\,,$$

$$f_1 + f_2\sqrt{-1} = \frac{(2n+1)(1+4\pi\theta)}{2n+1+4\pi\theta n}\,,$$

was wir gleichfalls gefunden haben. (Seite 103).

Im allgemeinen ist ersichtlich, dafs die Form der Strömung in der magnetischen Kugel dieselbe ist, wie diejenige, welche in einer unmagnetischen Kugel von gleichem Widerstande entsteht, wenn letztere $(1 + 4\pi\theta)$ mal schneller rotiert als die magnetische Kugel. Beide Strömungen unterscheiden sich dann aber noch dadurch von einander, dafs sie, als Ganzes gedacht, um einen gewissen Winkel gegen einander gedreht sind, sowie durch ihre verschiedene Intensität.

Ich wende die Formel auf zwei spezielle Fälle an.

1. Es sei $4\pi\theta$ sehr grofs, ω aber hinreichend klein, dafs μ^2R^2 gegen die Einheit verschwindet. Es soll die Formel entwickelt werden und nur die erste Potenz dieser Gröfse beibehalten werden. Man hat: Kleine Rotationsgeschwindigkeiten.

$$f_1 + f_2\sqrt{-1} = \frac{2n+1}{n}\,\frac{p_n(\mu\varrho\lambda)}{p_n(\mu R\lambda)}$$

$$= \frac{2n+1}{n}\cdot\frac{2(2n+3)+\mu^2\varrho^2\sqrt{-1}}{2(2n+3)+\mu^2R^2\sqrt{-1}} \quad \text{(Seite 82)}.$$

Für den Drehungswinkel erhalten wir unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung:

$$\delta = \operatorname{arctg}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = -\frac{\mu^2}{2(2n+3)}(R^2-\varrho^2)$$

$$\frac{\delta}{i} = -\frac{16\pi^2\omega\theta}{2(2n+3)\varkappa}(R^2-\varrho^2)\,.$$

Die Drehung ist also Null in der äufsersten Schicht[1]),

[1]) Eine Folge davon, dafs in dieser Schicht für grofse θ, nach den Gleichungen für χ_θ

$$N_r - \frac{\partial\chi_\theta}{\partial r} = 0 \quad \text{ist.}$$

Digitized by Google

im allgemeinen ist sie bedeutend vergrößert gegen die unmagnetische Kugel, nahezu im Verhältnis $4\pi\theta$.

In Fig. 9 sind für eine Eisenkugel die Kurven dargestellt, welche den auf Seite 85 für eine Kupferkugel gegebenen entsprechen. Dabei ist der Widerstand des Eisens

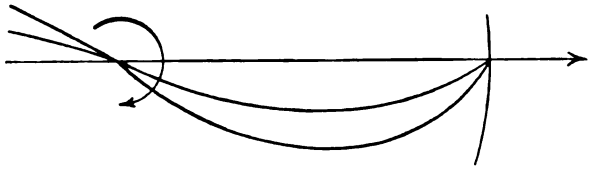


Fig. 9.

gleich dem 6fachen des Kupfers angenommenen, und $4\pi\theta = 200$ gesetzt. Die dargestellten Geschwindigkeiten sind äußerst geringe, nämlich eine Umdrehung in 10 Sekunden und eine Umdrehung in 5 Sekunden; schon hier macht sich also die Selbstinduktion recht bemerklich. Vgl. Fig. 15b, Seite 131.

Große Geschwindigkeiten.

2. Wird ω sehr groß, während θ einen endlichen, übrigens beliebigen Wert behält, so wird, wie man leicht aus den Formeln ableitet, die Erscheinung derjenigen in unmagnetischen Kugeln durchaus ähnlich werden. Auch hier ist schließlich der Drehungswinkel in der äußersten Schicht $\pi/4i$. Die Erscheinung ist identisch mit derjenigen, welche in der unmagnetischen Kugel bei einer $(1 + 4\pi\theta)$fachen Geschwindigkeit besteht. Die erzeugte Wärme ist dann $\sqrt{1 + 4\pi\theta}$ mal größer als in der mit gleicher Geschwindigkeit bewegten unmagnetischen Kugel.

§ 7. Verwandte Probleme.

Es sollen in diesem Paragraphen einige Probleme besprochen werden, die mit den früher behandelten in engem Zusammenhange stehen.

I.

Beliebige Rotationskörper.

Sehen wir von der Selbstinduktion ab, so können wir die Kenntnis der Strömung in einer Kugel dazu benutzen, um die Strömung in einem beliebig gestalteten Rotationskörper zu bestimmen, oder doch deren Bestimmung auf eine einfachere Aufgabe zurückzuführen.

Digitized by Google

Es sei S der Rotationskörper, n seine nach innen gekehrte Normale. Wir beschreiben um ihn eine Kugel von beliebigem Radius. Seien $u_1 v_1 w_1$ die Strömungen, welche in letzterer stattfinden würden, und

$$N = u_1 \cos a + v_1 \cos b + w_1 \cos c$$

die Strömung in Richtung der n an der Oberfläche von S. Bestimmen wir $u_2 v_2 w_2$ so, dafs

$$\varkappa u_2 = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}$$

$$\varkappa v_2 = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}$$

$$\varkappa w_2 = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0$$

$$u_2 \cos a + v_2 \cos b + w_2 \cos c = -N \quad ,$$

so sind offenbar

$$u_1 + u_2 \quad , \quad v_1 + v_2 \quad , \quad w_1 + w_2$$

die gesuchten Strömungen in S. Die Aufgabe ist also auf die einfachere zurückgeführt:

Eine Funktion φ_2 so zu bestimmen, dafs im Inneren von S $\Delta\varphi_2 = 0$ und an der Oberfläche $\partial\varphi / \partial n = \varkappa N$, gleich einer gegebenen Funktion, ist.

Geradlinig begrenzte Platten.

1. Es sei beispielsweise eine geradlinig bewegte Platte einseitig begrenzt durch die Gerade $\xi = b$. Es sei die äufsere Potentialfunktion aufgelöst und ein Glied derselben

$$Ae^{-sn} \cos r\eta \cos s\xi \quad .$$

Dann fanden wir für die Strömung in der unendlichen Platte

$$\psi_1 = \frac{r}{n} \cdot \frac{\alpha}{\varkappa} \cdot \sin r\eta \cos s\xi \quad .$$

Also ist die Strömung senkrecht zur Grenze:

$$-\frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} = -\frac{r^2}{n} \cdot \frac{\alpha}{\varkappa} \cdot \cos r\eta \cos sb \quad .$$

Digitized by Google

Daraus folgen für φ_2 die Bedingungen:

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} = 0 \quad ,$$

und für $\xi = b$:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} = \frac{r^2}{n} \frac{\alpha}{\varkappa} \cos r\eta \cos sb \quad .$$

Also ist

$$\varphi_2 = \frac{r}{n} \alpha e^{r(\xi - b)} \cos r\eta \cos sb \quad .$$

Zu φ_2 gehört die Strömungsfunktion

$$\psi'_2 = -\frac{r}{n} \cdot \frac{\alpha}{\varkappa} \cdot e^{-r(b-\xi)} \sin r\eta \cos sb \quad ,$$

und es wird daher die gesamte Strömungsfunktion

$$\psi_1 + \psi_2 = \frac{r}{n} \cdot \frac{\alpha}{\varkappa} \cdot e^{-rb} \sin r\eta \, (e^{r\xi} \cos sb - e^{rb} \cos s\xi) \quad .$$

Durch Summation über alle Glieder folgt die vollständige Lösung. Ähnlich ist die Lösung für beiderseitig begrenzte Streifen.

Begrenzte Scheibe.

2. Um die Strömung in einer begrenzten rotierenden Scheibe zu bestimmen, sei ein Glied der äußeren Potentialfunktion

$$A e^{-n\zeta} \cos i\omega \, J^i(n\varrho) \quad .$$

Dann war

$$\psi_1 = \frac{\omega}{\varkappa} \frac{i}{n} \sin i\omega \, J^i(n\varrho) \quad ,$$

also die Strömung in Richtung des Radius nach innen für die Grenze, für $\varrho = R$:

$$\frac{\partial \psi_1}{R \partial \omega} = \frac{\omega}{\varkappa} \frac{i^2}{n} \cos i\omega \, \frac{J^i(nR)}{R} \quad .$$

Daraus folgt, wie oben:

$$\varphi_2 = -\omega \frac{i}{n} J^i(nR) \left(\frac{\varrho}{R}\right)^i \cos i\omega \quad .$$

Digitized by Google

Nach Bestimmung der diesem φ_2 entsprechenden Strömung ψ_2 folgt die gesamte Strömung:

$$\psi_1 + \psi_2 = \frac{\omega}{\varkappa} \frac{i}{n} \frac{\sin i\omega}{R^i} \{R^i J^i(n\varrho) - \varrho^i J^i(nR)\} \quad .$$

Durch Summation sind wieder die vollständigen Integrale zu erhalten. In gleicher Weise läfst sich die Strömung für Ringe bestimmen, die von konzentrischen Kreisen begrenzt sind.

Im allgemeinen wird weder die Auflösung nach einzelnen Gliedern, noch die Bestimmung des Potentiales φ_2 zur Lösung der Aufgabe erforderlich sein, es wird genügen, ψ_2 so zu bestimmen, dafs es in der Platte der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} = 0$$

genügt und an der Grenze derselben $= -\psi_1$ wird. Einige einfache Beispiele werden in § 9 gegeben.

II.

Dielektrische Kugeln.

In Leitern bringen die elektromotorischen Kräfte elektrodynamischen Ursprunges dieselben Wirkungen hervor, wie die ihnen numerisch gleichen Kräfte elektrostatischen Ursprunges. Findet das Gleiche in dielektrischen Mitteln statt, so müssen Kugeln aus dielektrischem Material, welche im magnetischen Felde rotieren, eine Polarisation annehmen. Seien

$$\mathfrak{x},\ \mathfrak{y},\ \mathfrak{z} \quad \frac{\mathrm{mm}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{mgr}^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{sec}^2} \quad ^1)$$

die Komponenten derselben,

$$\varepsilon \qquad (\text{Zahl})\ ^1)$$

die Dielektricitätskonstante.

---

[1]) Die Einheiten sind wieder derart, dafs die Lichtgeschwindigkeit $1/A$ nicht auftritt, die entsprechenden Gröfsen in magnetischem Mafse sind gleich $A^2\mathfrak{x}$, $A^2\mathfrak{y}$, $A^2\mathfrak{z}$, $A^2\varepsilon$.

Digitized by Google

Dann gelten für $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}$ die Gleichungen:

$$\mathfrak{x} = -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varepsilon\mathfrak{X}$$

$$\mathfrak{y} = -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \varepsilon\mathfrak{Y}$$

$$\mathfrak{z} = -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \varepsilon\mathfrak{Z} \quad ,$$

$$\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial z} = \frac{1}{4\pi}\Delta\varphi \quad ;$$

für $\varrho = R$:

$$\mathfrak{x}x + \mathfrak{y}y + \mathfrak{z}z = \frac{\varrho}{4\pi}\left[\frac{\partial\varphi_i}{\partial\varrho} - \frac{\partial\varphi_a}{\partial\varrho}\right] \quad .$$

Daraus folgt für φ:

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi\varepsilon}{1+4\pi\varepsilon}\left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right)$$

und für $\varrho = R$:

$$(1+4\pi\varepsilon)\frac{\partial\varphi_i}{\partial\varrho} - \frac{\partial\varphi_a}{\partial\varrho} = \frac{4\pi\varepsilon}{\varrho}(x\mathfrak{X}+y\mathfrak{Y}+z\mathfrak{Z}) \quad .$$

Im äufseren Raume mufs sein $\Delta\varphi = 0$.

Ist wieder χ_n das $n$te Glied des äufseren Potentiales, so ist, wie oben (Seite 45):

$$\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z} = 2\omega\frac{\partial\chi_n}{\partial z}$$

$$x\mathfrak{X} + y\mathfrak{Y} + z\mathfrak{Z} = \omega\left(\varrho^2\frac{\partial\chi_n}{\partial z} - nz\chi_n\right) \quad .$$

Um die Bedingungsgleichungen zu erfüllen, setzen wir:

$$\varphi = \varphi^0 + \varphi' \quad ,$$

$$\varphi_i^0 = \frac{4\pi\varepsilon}{1+4\pi\varepsilon}\frac{\omega}{n+1}\left(\varrho^2\frac{\partial\chi_n}{\partial z} - nz\chi_n\right) \quad ,$$

Digitized by Google

$$\varphi_a^0 = \frac{4\pi\varepsilon}{1+4\pi\varepsilon}\,\frac{\omega}{n+1}\left[\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+2}\frac{n}{n+1}\overline{\left(\frac{\varrho^2}{2n+1}\frac{\partial\chi_n}{\partial z} - z\chi_n\right)} + \left(\frac{R}{\varrho}\right)^n \frac{R^2}{2n+1}\overline{\frac{\partial\chi_n}{\partial z}}\right].$$

φ_i^0 genügt der partiellen Differentialgleichung, welcher φ genügen soll. φ_a^0 ist so gebildet, dafs es 1. der Gleichung

$$\Delta\varphi_a^0 = 0$$

genügt, 2. an der Oberfläche der Kugel mit $\varphi^0{}_i$ zusammenfällt. Dafs erstere Bedingung erfüllt ist, erkennt man daraus, dafs die überstrichenen Ausdrücke Kugelflächenfunktionen $(n+1)$ten und $(n-1)$ten Grades sind, wie man leicht nachweist. Durch Einsetzung von $\varphi^0 + \varphi'$ in die Bedingungen für φ erhält man für φ' die Gleichungen:

$$\Delta\varphi' \text{ überall } = 0, \qquad \varphi' \text{ stetig},$$

für $\varrho = R$:

$$(1 + 4\pi\varepsilon)\frac{\partial\varphi_i'}{\partial\varrho} = \frac{\partial\varphi_a'}{\partial\varrho} + \frac{\partial\varphi_a^0}{\partial\varrho} \quad ,$$

deren Erfüllung keine Schwierigkeit hat, da wir φ_a^0 schon als Summe von Kugelfunktionen dargestellt haben.

Erde im dielektrischen Raume.

Von besonderem Interesse ist der Fall, dafs ein kugelförmiger Magnet in einem, ihn umgebenden ruhenden Dielektrikum rotiert, da die Erde ein rotierender Magnet und der Weltraum nach der Annahme vieler Physiker ein Dielektrikum ist. Um in diesem Falle das elektrische Potential zu bestimmen, haben wir zu beachten, dafs die Erde ein Leiter ist, es wird daher auch in ihr eine Verteilung eintreten, die auf das Dielektrikum zurückwirkt, und zur Folge hat, dafs an der Oberfläche der Erde das Potential konstant wird.

Ist $\chi = \Sigma\chi_n$ das Potential der Erde, so ist die Aufgabe diese:

φ so zu bestimmen, dafs im äufseren Raum

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi\varepsilon}{1+4\pi\varepsilon}\cdot 2\omega\frac{\partial\chi}{\partial z} \quad ,$$

und an der Oberfläche $\varphi = \text{const}$ ist.

Digitized by Google

Man findet leicht:

$$\varphi = \frac{4\pi\varepsilon}{1+4\pi\varepsilon}\,\omega \sum \frac{R^2-\varrho^2}{2n+1}\,\frac{\partial \chi_n}{\partial z} \quad .$$

Für die Steigung des Potentiales an der Erdoberfläche folgt daraus:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = \frac{4\pi\varepsilon}{1+4\pi\varepsilon}\,2R\omega \sum \frac{1}{2n+1}\,\overline{\frac{\partial \chi_n}{\partial z}} \quad .$$

Bei weitem der gröfste Teil der erdmagnetischen Kraft rührt von den Gliedern her, für welche $n = -2$, oder doch klein ist. Annähernd können wir daher setzen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = \frac{4\pi\varepsilon}{1+4\pi\varepsilon}\,\frac{2}{3}\,R\omega\,\overline{\frac{\partial \chi}{\partial z}} \quad .$$

$\overline{\partial \chi}/\partial z$ ist die gegen den Nordpol des Himmels gewandte Komponente der erdmagnetischen Kraft.

Nimmt man an, dafs für den Weltraum $4\pi\varepsilon/(1+4\pi\varepsilon)$ sehr nahe an 1 sei, so erhält man für die elektrischen Steigungen Werte, die von der Ordnung von 1 Daniell auf 50 m, also aufserordentlich klein sind. Zu dem obigen Werte von φ kann übrigens noch ein Glied von der Form const/ϱ hinzutreten. Der Wert desselben hängt ab von der Menge der freien Elektricität, welche die Erde mit sich führt, und ist nicht Null, wenn diese Menge Null ist; die Ordnung der berechneten Kräfte wird aber durch dieses Glied nicht geändert.

III.

Kugelförmiger Magnet in einer Flüssigkeit.

Rotiert eine beliebig magnetisierte Kugel in einer Flüssigkeit, die selber leitet und die Oberfläche der Kugel leitend berührt, so wird die Kugel in der Flüssigkeit Ströme verursachen, die im allgemeinen nicht mehr in konzentrischen Kugelschalen erfolgen, sondern den Magneten durchsetzen.

Die Bestimmung dieser Ströme hat, von der Selbstinduktion abgesehen, keine Schwierigkeit mehr, ich will auf die Rechnungen nicht eingehen. Fig. 10 soll den einfachsten Fall

Digitized by Google

veranschaulichen: Eine homogen magnetisierte Kugel rotiert um ihre magnetische Axe. Die gezeichnete Figur stellt die Strömungslinien in einem Meridianschnitt dar. Die Form

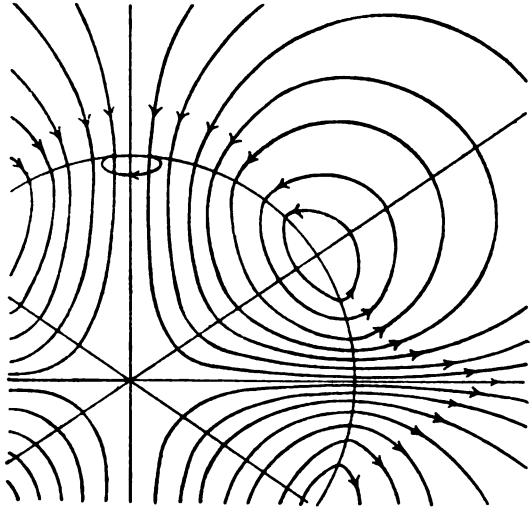


Fig. 10.

derselben ist hier unabhängig von den Widerständen der Flüssigkeit und des Magneten. Die Intensität aber wird Null, wenn einer derselben unendlich wird.

§ 8. Lösung für die Formeln des Potentialgesetzes.

Ich habe bisher für die induzierten elektromotorischen Kräfte diejenigen Formen angenommen, welche Herr JOCHMANN für dieselben aus dem WEBER'schen Grundgesetze abgeleitet hat. Ich will jetzt untersuchen, welche Änderungen die Resultate erleiden durch Anwendung der aus dem Potentialgesetze folgenden Formeln, welche im 78. Bande des BORCHARDT'schen Journales gegeben sind [1]).

Bezeichnen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die bisher angenommenen elektromotorischen Kräfte, $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ die aus dem Potentialgesetze folgenden, so ist

[1]) [HELMHOLTZ, Wiss. Abh. Bd. I. S. 702.]

Digitized by Google

$$\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} - \omega \frac{\partial}{\partial x}(Vx - Uy)$$

$$\mathfrak{Y}' = \mathfrak{Y} - \omega \frac{\partial}{\partial y}(Vx - Uy)$$

$$\mathfrak{Z}' = \mathfrak{Z} - \omega \frac{\partial}{\partial z}(Vx - Uy) \quad .$$

Wir haben aber auf Seite 71 gesehen, dafs für alle in der Untersuchung vorkommenden UVW wird:

$$\varphi = \omega(Vx - Uy) \quad .$$

Man übersieht sofort, dafs wir die bisherigen Lösungen in Bezug auf u, v, w, ψ, Ω unverändert beibehalten können. Die einzige Änderung, welche wir vorzunehmen haben, ist die, dafs wir für das Potential der freien Elektricität φ' jetzt zu setzen haben

$$\varphi' = \text{const.} \quad ,$$

und, wenn ursprünglich freie Elektricität nicht vorhanden war:

$$\varphi' = 0 \quad .$$

Auf einer unendlichen Kugel oder ebenen Platte mufs immer sein:

$$\varphi' = 0 \quad .$$

Zu dem gleichen Resultate ist Herr MAXWELL gelangt, indem er von den Gleichungen des Potentialgesetzes für ruhende Leiter ausging. Verwirft man die Glieder $\alpha U + \beta V + \gamma W$ in den Formeln der elektromotorischen Kräfte für bewegte Leiter, so sind auch die Gleichungen für ruhende Leiter abzuändern, und die Gleichung

$$\varphi = 0$$

gilt dann nicht mehr.

§ 9. Spezielle Fälle und Anwendungen.

Zum Schlusse sollen die gefundenen Formeln auf einige spezielle Fälle angewandt werden.

Digitized by Google

Magnetpol über einer ebenen Platte.

1. Ein einzelner Magnetpol von der Intensität 1 bewege sich geradlinig parallel einer unendlich dünnen ebenen Platte. In den Fufspunkt des von ihm auf die Platte gefällten Perpendikels werde der Anfangspunkt der $\xi\,\eta\,\zeta$ gelegt, die negative η Axe falle mit der Richtung seiner Bewegung zusammen.[1]) Die Koordinaten des Poles seien 0, 0, $-c$, dann ist sein Potential:

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+(\zeta+c)^2}} = \frac{1}{r} \quad .$$

Also wird das induzierte Potential erster Ordnung für positive ζ:

$$\Omega_1 = -\frac{2\pi\alpha}{k}\int_{\zeta}^{\infty}\frac{\partial\chi}{\partial\eta}\,d\zeta$$

$$= \frac{2\pi\alpha}{k}\frac{\eta}{\eta^2+\xi^2}\left(1-\frac{\zeta+c}{r}\right) \quad .$$

Daraus folgt das Potential zweiter Ordnung:

$$\Omega_2 = -\frac{2\pi\alpha}{k}\int_{\zeta}^{\infty}\frac{\partial\Omega_1}{\partial\eta}\,d\zeta$$

$$= \left(\frac{2\pi\alpha}{k}\right)^2\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{\frac{(c+\zeta-r)\eta}{\eta^2+\xi^2}\right\}$$

$$= \left(\frac{2\pi\alpha}{k}\right)^2\frac{1}{\xi^2+\eta^2}\left\{\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2+\eta^2}(c+\zeta-r)-\frac{\eta^2}{r}\right\} \quad .$$

In derselben Weise kann weiter gerechnet werden.

Für die Strömungsfunktionen erster und zweiter Ordnung erhalten wir:

$$\psi_1 = \frac{\alpha}{k}\frac{\eta}{\eta^2+\xi^2}\left(1-\frac{c}{r}\right)$$

$$= \frac{\alpha}{k}\frac{\eta}{r(r+c)}\,^{2}) \quad ,$$

[1]) Dann wird α positiv.

[2]) Dies Resultat stimmt vollständig mit dem von Herrn Jochmann erhaltenen überein.

Digitized by Google

$$\psi_2 = -2\pi\left(\frac{\alpha}{k}\right)^2 \frac{r\xi^2 + c\eta^2}{(r^2-c^2)(r+c)r} \quad ,$$

worin jetzt $r^2 = \xi^2 + \eta^2 + c^2$ ist.

In der η Axe ist: $(\xi = 0)$

$$\psi_2 = -2\pi\left(\frac{\alpha}{k}\right)^2 \frac{c}{(r+c)r} \quad ,$$

also

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \frac{\alpha}{k}\frac{1}{(r+c)r}\left(\eta - \frac{2\pi\alpha c}{k}\right) \quad .$$

Verschiebung der Induktionserscheinung.

Als den Mittelpunkt der Erscheinung können wir den Punkt $\xi = 0$, $\psi = 0$ bezeichnen, derselbe erscheint also infolge der Selbstinduktion verschoben um die Strecke $2\pi\alpha c/k$ und zwar bleibt er um die genannte Länge hinter dem bewegten Pole zurück. Das gleiche gilt von der gesamten Erscheinung in der Nähe des Pols.

Für unendliche Geschwindigkeiten wird

$$\Omega_+ = -\chi = -\frac{1}{r} \quad ,$$

$$\psi = -\frac{1}{2\pi r} \quad ;$$

für sehr grofse Werte von $2\pi\alpha/k$:

$$\Omega = -\chi - \frac{k}{2\pi\alpha}\int_0^{\eta} \frac{\partial\chi}{\partial\zeta}\, d\eta$$

$$= -\frac{1}{r} + \frac{k}{2\pi\alpha}\frac{\eta(\zeta+c)}{r(r^2-\eta^2)}$$

$$\psi = -\frac{1}{2\pi r}\left(1 - \frac{k}{2\pi\alpha}\frac{\eta c}{\xi^2+c^2}\right) \quad .$$

Auch hier ist die Abscisse des Punktes $\xi = 0$, $\psi = 0$:

$$\eta = \frac{2\pi\alpha c}{k} \quad ,$$

da aber dieser Wert sehr grofs ist, und unsere Formel nur für endliche η gilt, so ist er nicht als exakt zu betrachten.

Digitized by Google

Das Potential der freien Elektricität in der Platte ist:

$$\varphi = \alpha \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \eta} (\chi + \Omega)\, d\zeta \quad ,$$

also für kleine Geschwindigkeiten:

$$\varphi = \alpha \int_0^\infty \frac{\partial \chi}{\partial \xi}\, d\zeta = - \alpha \frac{\xi}{r\,(r+c)} \quad .$$

Die Niveaulinien haben also in diesem Falle dieselbe Form wie die Stromlinien. Für sehr grofse Geschwindigkeiten ist:

$$\varphi = \frac{\varkappa}{2\pi} \int_0^\eta \frac{\partial \chi}{\partial \xi}\, d\eta = - \frac{\varkappa}{2\pi} \frac{\eta \xi}{r\,(r^2 - \eta^2)} \quad ,$$

welche Formel im Unendlichen ihre Gültigkeit verliert.

Die hier entwickelten Formeln sind durch Fig. 11, Seite 120 und 121 veranschaulicht. Die der Zeichnung zu Grunde gelegten Annahmen sind die folgenden: Zu Fig. 11.

Die Platte ist von Kupfer (also $\varkappa = 227\,000$), ihre Dicke ist 2 mm (also $k = 113\,500$). Der Abstand des Pols von der Platte ist 30 mm. Die eingeschriebenen Werte von ψ geben absolutes Mafs, wenn die Stärke des Pols $= 13\,700$ mm$^{\frac{3}{2}}$ mgr$^{\frac{1}{2}}$/sec ist.

In Fig. 11 a und b ist die Geschwindigkeit des Poles 5 m/sec ($\alpha = 5000$), dabei stellt a die Erscheinung ohne Berücksichtigung der Selbstinduktion, b mit Berücksichtigung derselben dar.

Fig. 11 c giebt die Erscheinung für die Geschwindigkeit 100 m/sec, berechnet aus der für grofse $2\pi\alpha/k$ geltenden Formel. Bei dem gewählten Werte ist allerdings die Annäherung noch keine sehr vollkommene. Fig. 11 d entspricht unendlicher Geschwindigkeit des Poles, in die Zeichnung sind auch die Niveaukurven des elektrischen Potentiales eingetragen. Die eingeschriebenen Werte des letzteren bedeuten Millionen der von uns gebrauchten Einheiten.

Der Zusammenhang der verschiedenen Zustände geht aus den Zeichnungen selbst klar hervor.

Digitized by Google

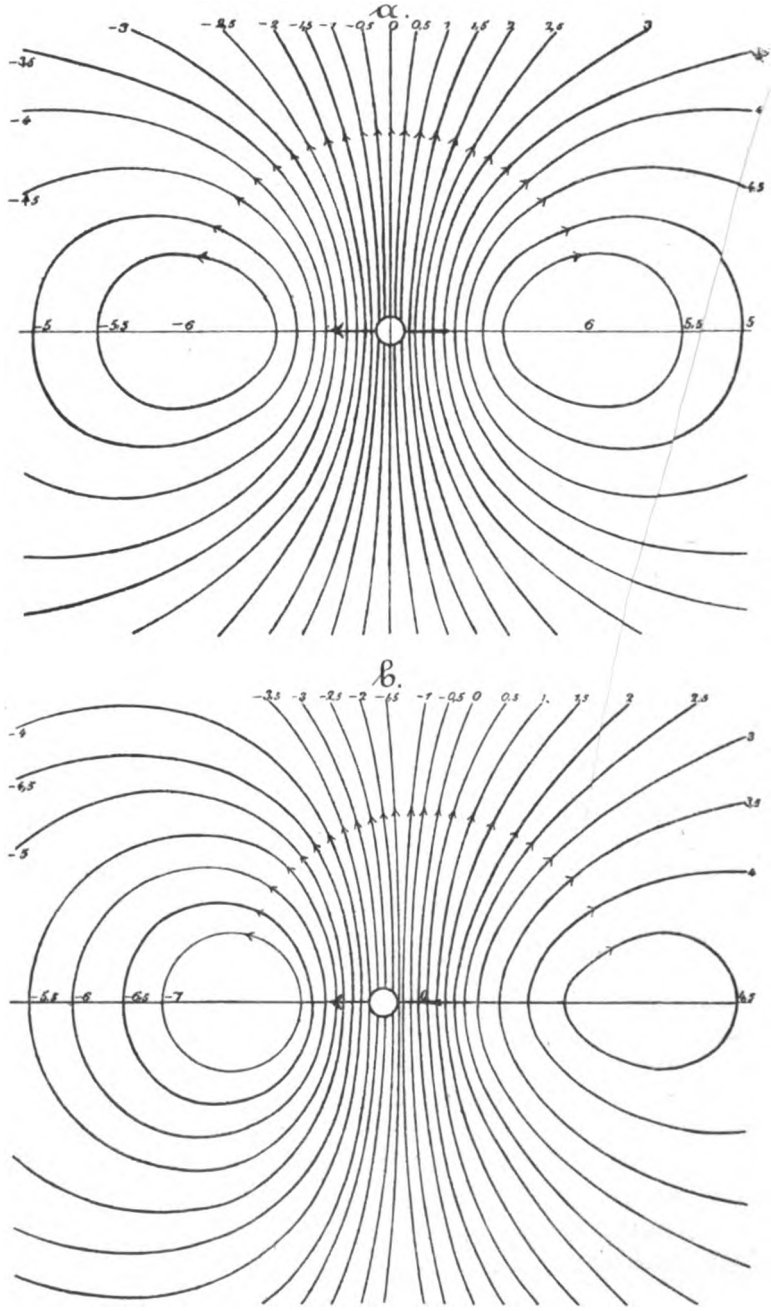


Fig. 11a und b. Geradlinig bewegter Pol. $^2/_3$ nat. Gr.

Digitized by Google

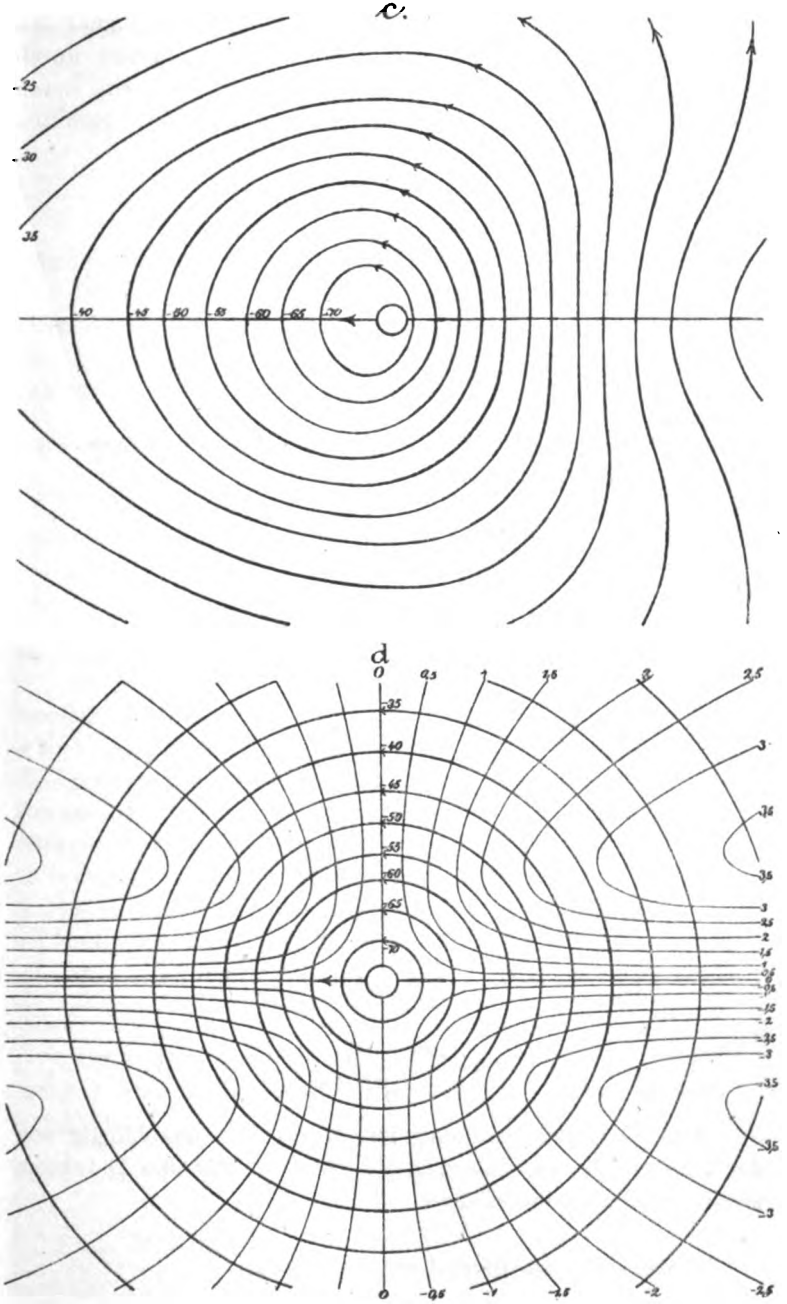


Fig. 11 c und d. Geradlinig bewegter Pol. $^2/_3$ nat. Gr.

Digitized by Google

Magnetpol über einer Scheibe.

2. Ein ruhender Magnetpol befinde sich über einer rotierenden unendlichen Scheibe. Die xz Ebene werde durch den Pol gelegt. Neben den xyz führen wir die $\xi\eta\zeta$ ein, deren Nullpunkt der Fufspunkt des vom Pole auf die Platte gefällten Perpendikels sei. Übrigens sei

$$\xi = x - a$$
$$\eta = y$$
$$\zeta = z \quad ,$$

also

$$\frac{\partial}{\partial \omega} = a\frac{\partial}{\partial \eta} + \xi\frac{\partial}{\partial \eta} - \eta\frac{\partial}{\partial \xi} \quad .$$

a ist der Abstand des Poles von der Rotationsaxe, sei c sein Abstand von der Platte. Dann ist

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+(\zeta+c)^2}} = \frac{1}{r} \quad .$$

Also

$$\Omega_1 = -\frac{2\pi\omega}{k}\int_{\zeta}^{\infty}\frac{\partial\chi}{\partial\omega}\,d\zeta \quad ,$$

also, da

$$\xi\frac{\partial\chi}{\partial\eta} - \eta\frac{\partial\chi}{\partial\xi} = 0 \text{ ist} \quad ,$$

$$\Omega_1 = -\frac{2\pi\omega a}{k}\int_{\zeta}^{\infty}\frac{\partial\chi}{\partial\eta}\,d\zeta$$

$$= \frac{2\pi\omega a}{k}\frac{\eta}{\eta^2+\xi^2}\left(1 - \frac{\zeta+c}{r}\right)$$

$$\psi_1 = \frac{\omega a}{k}\frac{\eta}{r(r+c)} \quad .$$

Die Form der Strömungskurven ist also unabhängig von der Entfernung des Pols von der Axe.[1]) Für die Induktion zweiter Ordnung findet man

1) Wie schon von Herrn Jochmann gefunden.

Digitized by Google

$$\Omega_2 = \left(\frac{2\pi\omega}{k}\right)^2 a \frac{\partial}{\partial\omega}\left\{\frac{(\zeta + c - r)\,\eta}{\xi^2+\eta^2}\right\}$$

$$\psi_2 = -\left(\frac{2\pi\omega}{k}\right)^2 a \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\eta}{r+c}\right)$$

$$= -2\pi\left(\frac{\omega a}{k}\right)^2\left(\frac{r\xi^2 + c\eta^2}{(r^2-c^2)(r+c)r} + \frac{\xi}{a(r+c)}\right) \quad ,$$

welche Formeln im Unendlichen keine Gültigkeit haben.

Bei kleiner Drehungsgeschwindigkeit, und falls der induzierende Pol nicht sehr nahe an der Axe liegt, können wir den Punkt $\xi = 0$, $\psi = 0$ als den Mittelpunkt der Erscheinung bezeichnen. Die Ordinate desselben wird gefunden:

$$\eta_0 = \frac{2\pi\omega ac}{k} \quad .$$

In der Nähe des Pols ist also die Erscheinung infolge der Selbstinduktion gedreht um den Winkel

Drehung der Induktionserscheinung.

$$\frac{2\pi\omega c}{k}$$

im Sinne der Drehungsrichtung der Scheibe.

3. Ich will die Formeln jetzt auf ein neues Beispiel anwenden. Über die rotierende Scheibe mögen parallel der x Axe zwei Drähte gespannt sein, die in entgegengesetzten Richtungen von gleichen Strömen von der Intensität 1 durchflossen sind. Für einen einzelnen Strom würden die induzierten Ströme in der unendlichen Scheibe unendlich werden.

Geradlinige Ströme und unbegrenzte Scheibe.

Die Koordinaten der Punkte, in welchen die Drähte die yz Ebene durchsetzen, seien $0, a, -c$, und $0, a', -c'$, es ist dann für positive z:

$$\chi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y-a}{z+c}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{y-a'}{z+c'}\right) \quad .$$

Daraus folgt durch die mehrfach angewandten Formeln, wenn r und r_1 die senkrechten Abstände von den Drähten bezeichnen:

$$\Omega = \frac{2\pi\omega}{k} x \log\left(\frac{r}{r_1}\right)$$

$$\psi = \frac{\omega}{k} x \log\left(\frac{r}{r_1}\right) \quad .$$

Digitized by Google

Für das Potential der freien Elektricität in der Platte findet man

$$\varphi = \omega y \log\left(\frac{r}{r_1}\right) \quad ,$$

die Linien gleichen Potentiales sind also Gerade, welche den
Zu Fig. 12a. Drähten parallel laufen. In Fig. 12a sind die Stromlinien für den Fall gezeichnet, dafs

$$c = c' = 10\,\text{mm} \quad , \quad a = -a' = 20\,\text{mm} \text{ ist.}$$

Da übrigens im Unendlichen die Strömungen unendlich werden, so wird man sich $2\pi\omega/k$ aufserordentlich klein denken

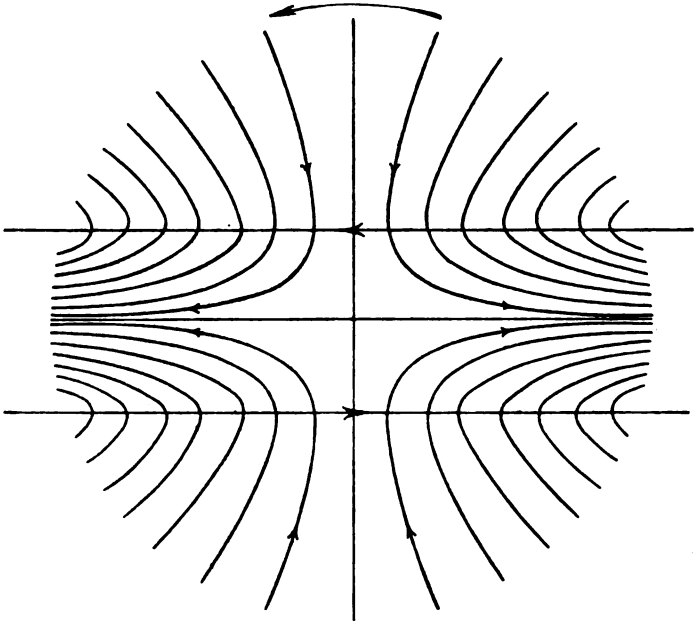


Fig. 12a. Rotierende Scheibe und geradlinige Ströme. $^2/_3$ nat. Gr.

müssen, um noch in einem endlichen Gebiete eine gute Annäherung zu erhalten.

Da ferner alle Ströme im Unendlichen geschlossen sind, läfst sich nicht ohne weiteres von der unendlichen auf die begrenzte Scheibe schliefsen.

Digitized by Google

Geradlinige Ströme und begrenzte Scheibe.

Ich will deshalb nach der § 7 entwickelten Methode die Strömung unter übrigens gleichen Umständen in einer endlichen Scheibe berechnen. Der Radius der letzteren sei R.

Die exakte Lösung des Problems erfordert die Entwickelung ziemlich komplizierter Funktionen in sinus- und cosinus-Reihen; ich mache deshalb die vereinfachende Annahme, dafs der senkrechte Abstand der stromtragenden Drähte vom Mittelpunkte der Scheibe grofs gegen die Dimensionen der letzteren sei.

Sei zunächst wieder

$$c = c' \quad , \quad a = -a' \quad .$$

Entwickelt man

$$\psi'_1 = \frac{\omega}{k} x \log\left(\frac{r}{r_1}\right)$$

nach Potenzen der Koordinaten und vernachlässigt die höheren Potenzen des Ausdrucks

$$\frac{y^2}{c^2+a^2} \quad ,$$

so erhält man:

$$\psi_1 = -\frac{2axy}{c^2+a^2} + \frac{2ay^3 x\,(3c^2-a^2)}{3(c^2+a^2)^3} + \cdots$$

$$= -\frac{a\varrho^2 \sin 2\omega}{c^2+a^2} + \frac{(3c^2-a^2)a}{6(c^2+a^2)^3}\,\varrho^4\left(\sin 2\omega - \frac{\sin 4\omega}{2}\right) \quad .$$

Das entsprechende ψ'_2 (§ 7, I, Schlufs) ist:

$$\psi_2 = \frac{a\varrho^2 \sin 2\omega}{c^2+a^2} - \frac{(3c^2-a^2)a}{6(c^2+a^2)^3}\,\varrho^2\left(R^2 \sin 2\omega - \frac{\varrho^2 \sin 4\omega}{2}\right) \quad .$$

Also wird:

$$\psi = -\frac{a(3c^2-a^2)}{6(c^2+a^2)^3}\,\varrho^2 \sin 2\omega\,(R^2-\varrho^2) \quad .$$

Die Form der Strömung ist also unabhängig von dem Verhältnis $a:c$, ihre Intensität ist aber wesentlich von demselben bedingt. Ist $a = 0$ oder $a = \sqrt{3}\,.\,c$, so wird sie gleich Null. Ist $a < c\sqrt{3}$, so ist die Richtung der Ströme dieselbe wie in

Digitized by Google

der unendlichen Scheibe; ist $a > c\sqrt{3}$, so wird sie die entgegengesetzte. Bei genauer Betrachtung der Verteilung der wirkenden Kräfte läfst sich dies zunächst auffällige Resultat wohl
Zu Fig. 12b. verstehen. Die Form der Erscheinung ist in Fig. 12b dargestellt.

Ebenso läfst sich die Aufgabe für eine beliebige Lage der Drähte lösen. Rückt der eine derselben ins Unendliche, so

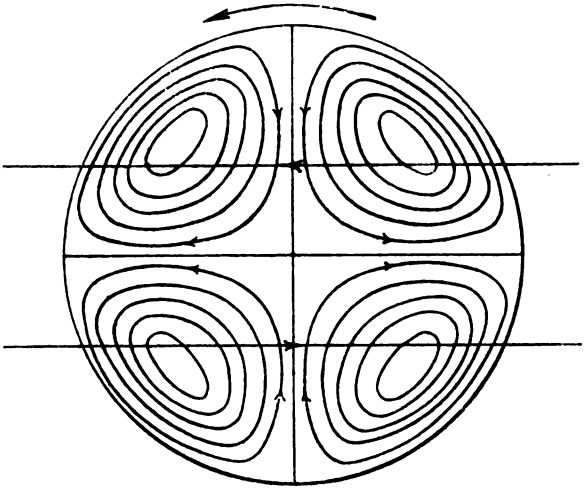


Fig. 12b. Rotierende Scheibe und geradlinige Ströme. $^2/_3$ nat. Gr.

bleiben in der endlichen Scheibe die Ströme endlich, und wir erhalten, unter Bewahrung der ersten beiden Potenzen der Dimensionen der Scheibe:

$$\psi = \frac{c^2 - a^2}{8(c^2+a^2)^2}\varrho\cos\omega\,(R^2-\varrho^2) - \frac{a(3c^2-a^2)}{12(c^2+a^2)^3}\varrho^2\sin 2\omega\,(R^2-\varrho^2)\,.$$

Der Zusammenhang mit dem vorigen Resultate ist leicht ersichtlich.

Zu Fig. 13. In Fig. 13 sind zwei besondere Fälle dargestellt. In a geht der geradlinige Draht durch die Rotationsaxe in hinreichender Entfernung von der Scheibe, es verschwindet in diesem Falle das zweite der oben beibehaltenen Glieder. In b liegt der Draht in der Ebene der Scheibe und zwar in derjenigen

Digitized by Google

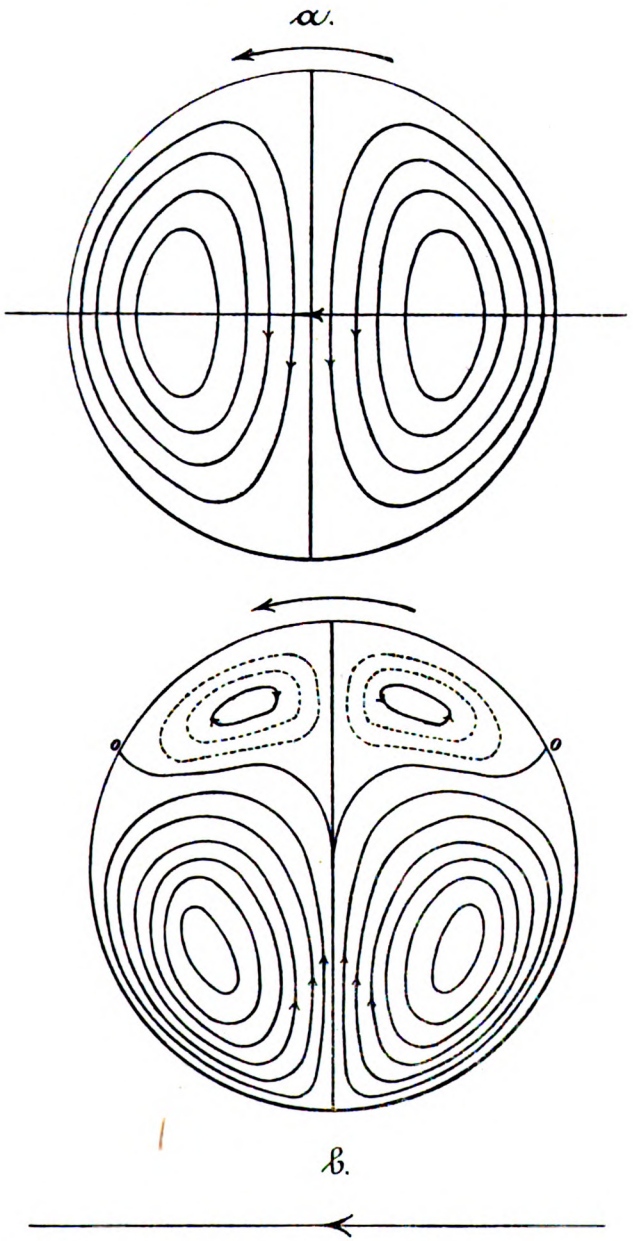


Fig. 13a und b. Rotierende Scheibe und geradliniger Strom. $^2/_3$ nat. Gr.

Digitized by Google

Entfernung von derselben, in welcher er in der Figur selbst dargestellt ist.

Rotierende Hohlkugeln.

4. Sollen über die Drehungserscheinungen der Induktion messende Versuche angestellt werden, so sind zu denselben durchaus dünne Hohlkugeln zu verwenden, da für diese sich die Rechnungen leicht und exakt ausführen lassen. Die einfachste Form des Versuches würde die sein, dafs man eine solche Hohlkugel unter dem Einflusse einer konstanten Kraft rotieren läfst. Die Drehung der Stromebenen kann entweder durch den Einfluſs derselben auf einen sehr kleinen Magnet, oder besser auf galvanometrischem Wege nachgewiesen werden.

Ausführung von Versuchen.

Ich will für ein Beispiel den Drehungswinkel und das magnetische Moment der rotierenden Hohlkugel bestimmen.

Die Kugel sei von Kupfer, ihr Radius 50 mm, ihre Wandstärke 2 mm; da $n = 1$, $i = 1$, so hat man:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{4\pi}{3} \frac{R\omega}{k} \quad ,$$

und für das Moment der Kugel findet man leicht, wenn T die induzierende Kraft ist:

$$M = T \frac{R^3 \sin \delta}{2} \quad .$$

Ist q die Zahl der Umdrehungen in der Sekunde, so ist

$$\omega = 2\pi q \quad ,$$

und da $k = 113\,500$, so findet man

$$\operatorname{tg} \delta = 0{\cdot}0116\, q \quad .$$

Hiernach ist die folgende Tabelle berechnet:

q	δ	$\frac{M}{T}$	q	δ	$\frac{M}{T}$
5	3° 19′	3614	80	42° 51′	42500
10	6° 27′	7178	90	46° 13′	45100
20	13° 3′	14110	100	49° 13′	47310
30	19° 10′	20520	200	66° 40′	57360
40	24° 53′	26290	500	80° 15′	61570
50	30° 60′	31340			
60	34° 49′	35680	∞	90°	62500
70	39° 4′	39380			

Digitized by Google

5. Die Figg. 14 und 15, Seite 130 und 131, sind dazu bestimmt, den Strömungszustand in Vollkugeln zu veranschaulichen, welche unter dem Einflusse einer konstanten zur Drehungsaxe senkrechten Kraft rotieren. Rotierende Vollkugeln und konstante Kraft.

Die geschlossenen Strombahnen sind hier sämtlich Kreise, deren Ebenen der Drehungsaxe parallel sind. Kennt man daher die Stromdichtigkeit in der Ebene des Äquators, so ist es sehr leicht, dieselbe in allen anderen Punkten zu bestimmen. Für die xy Ebene ist aber in unserem Falle $u = v = 0$, also die Stromdichtigkeit $= w$. Die Zeichnungen stellen nun die Dichtigkeit der Strömung in der genannten Ebene durch die Kurven: Zu Figg. 14 und 15.

$$w = \text{const.}$$

dar. Die eingeschriebenen Werte von w geben absolutes Maſs, wenn die wirkende Kraft

$$T = 289 \frac{\text{mgr}\,\frac{1}{2}}{\text{mm}\,\frac{1}{2}\,\text{sec}} \text{ ist.}$$

Die Gröſse der Kugeln ist die gezeichnete ($R = 50$ mm).

In Fig. 14 ist eine Kupferkugel bei 5 Umdrehungen in der Sekunde dargestellt (in a ohne Berücksichtigung der Selbstinduktion).

In Fig. 15a ist dieselbe Kugel dargestellt bei 50 Umdrehungen in der Sekunde.

Fig. 15b giebt die Strömung in einer Eisenkugel bei 5 Umdrehungen in der Sekunde. Dabei ist der Widerstand des Eisens gleich dem sechsfachen des Kupfers und $4\pi\theta = 200$ angenommen. Man sieht, daſs schon bei der genannten mäſsigen Geschwindigkeit eine Vernachlässigung der Selbstinduktion durchaus keine Annäherung mehr bieten würde.

6. Ein häufig ausgeführtes Experiment besteht darin, daſs leitende Kugeln, welche zwischen den Polen eines nicht erregten Elektromagneten rotieren, durch plötzliche Erregung desselben zur Ruhe gebracht werden. Die Theorie dieses Experimentes ist sehr einfach, wenn man das magnetische Feld als homogen betrachtet, von der Selbstinduktion absieht, und die Strömung in jedem Augenblicke wie eine stationäre behandelt. Ist T die Anhaltung rotierender Kugeln durch einen Elektromagneten

Digitized by Google

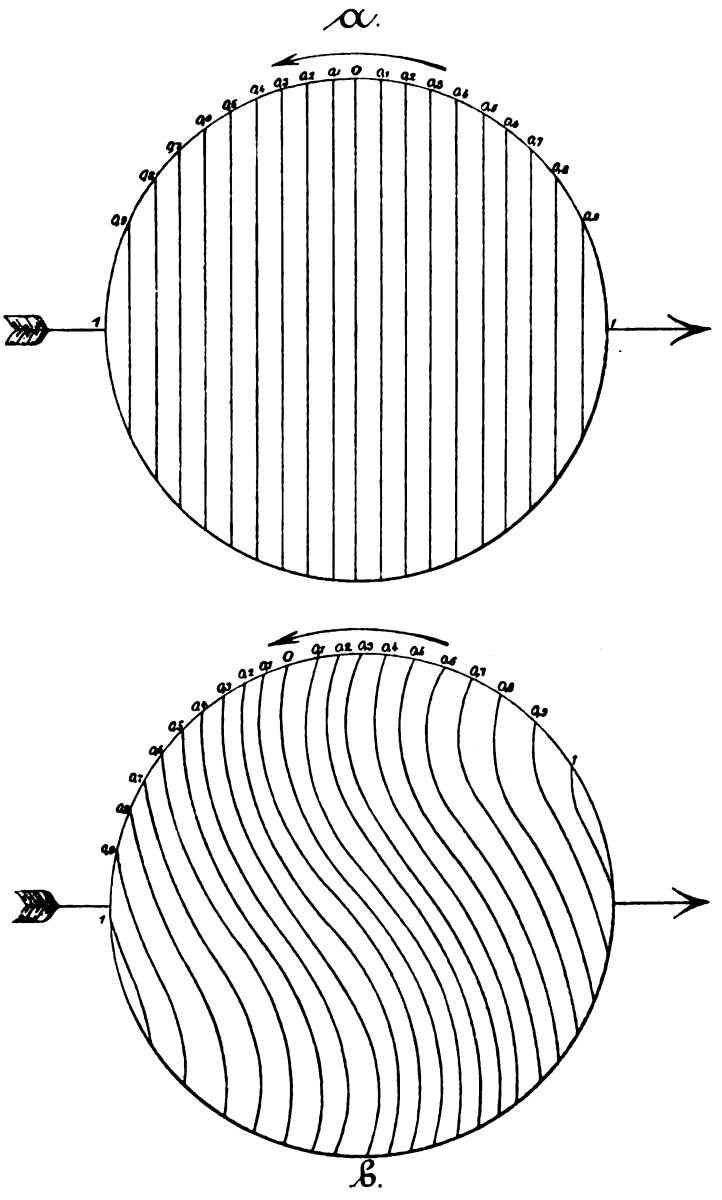


Fig. 14a und b. Rotierende Kupferkugel. 5 Umdrehungen in der Sekunde. $^2/_3$ nat. Gr.

Digitized by Google

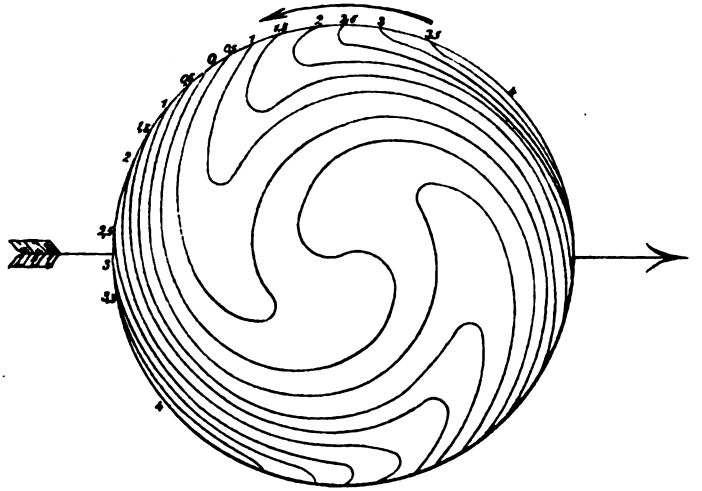


Fig. 15a. Rotierende Kupferkugel. 50 Umdrehungen in der Sekunde. $^2/_3$ nat. Gr.

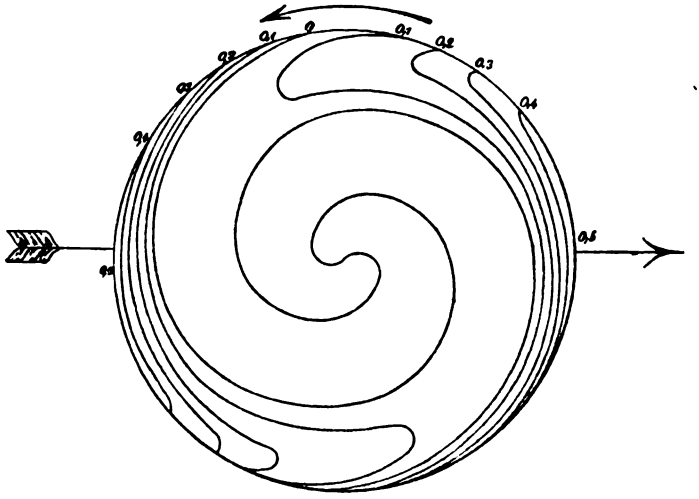


Fig. 15b. Rotierende Eisenkugel. 5 Umdrehungen in der Sekunde $^2/_3$ nat. Gr.

Digitized by Google

magnetische Kraft, welche in Richtung der x wirkt, so ist die äufsere Potentialfunktion

$$\chi = - T\varrho \sin\theta \cos\omega \quad ,$$

also

$$\psi = \frac{\omega}{2\varkappa} T\varrho^2 \sin\theta \sin\omega \quad ,$$

und demnach die erzeugte Wärme: (§ 6.)

$$W = \frac{2\pi R^5}{15} \cdot \frac{T^2\omega^2}{\varkappa} \quad .$$

Ist F das Trägheitsmoment der Kugel, ω_0 ihre Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$, und rotiert sie ohne den Einfluſs äufserer Kräfte, so ist die Gleichung ihrer Bewegung:

$$\frac{F\omega^2}{2} + \frac{2\pi}{15} \frac{T^2 R^5}{\varkappa} \int_0^t \omega^2 dt = \frac{F\omega_0^2}{2} \quad ,$$

oder

$$\omega = \omega_0 e^{-\frac{2\pi}{15} \frac{T^2 R^5}{F\varkappa} t} \quad .$$

Ist q die Masse eines Kubikmillimeters der Substanz, so ist

$$F = \frac{8}{15} q\pi R^5 \quad ,$$

also

$$\omega = \omega_0 e^{-\frac{T^2}{4q\varkappa} t} \quad .$$

Ein analoges Gesetz gilt, wenn sich die Kugel unter dem Einflusse rotierender Magnete in Bewegung setzt.

Kugeln verschiedener Radien und Hohlkugeln werden mit gleicher Schnelligkeit in Bewegung gesetzt und zur Ruhe gebracht. Dies entspricht in der That einer Beobachtung von MATTEUCCI [1]).

Beobachtung MATTEUCCI's.

Der Winkel, welchen die Kugel nach Erregung des Elektromagneten noch zurücklegt, beträgt:

$$\int_0^\infty \omega dt = \frac{4q\varkappa}{T^2} \omega_0 \quad .$$

[1]) WIEDEMANN, Galvanismus, § 878. [Lehre von der Elektricität, 1885: Bd. IV. § 386, S. 322.]

Digitized by Google

Für stark magnetische Kugeln findet man:

$$\int_0^\infty \omega\, dt = \frac{4q\varkappa}{9T^2}\,\omega_0 \quad .$$

Hiernach ist die folgende Tabelle berechnet. In derselben ist $T = 5000$ angenommen, was einem mäfsig starken Elektromagneten entspricht. Die Anfangsgeschwindigkeit ist gleich einer Umdrehung (2π) in der Sekunde genommen. Die zurückgelegten Winkel sind in ganzen Umdrehungen angegeben. Die relativen Werte gelten für jedes T und jedes ω_0.

Stoff:	$\int_0^\infty \omega\, dt$
Aluminium	0,14
Eisen	0,16
Silber	0,27
Kupfer	0,31
Neusilber	3,90
Graphit	27,2
Konz. Lösung von Kupfervitriol	ca. 544000

7. Dämpfung in einem Galvanometer.

Dämpfung im Galvanometer.

In einer leitenden Hohlkugel schwinge ein Magnet; derselbe sei entweder sehr klein, oder habe angenähert die Gestalt einer homogen magnetisierten Kugel; ist dann M sein Moment, so ist in der Hohlkugel

$$\chi = -\frac{M}{\varrho^2}\sin\theta\cos\omega \quad ,$$

also

$$\psi = -\frac{\omega}{\varkappa}\frac{M}{\varrho}\sin\theta\sin\omega \quad ,$$

und die erzeugte Wärme per Sekunde:

$$W = \frac{8\pi}{3}\frac{M^2\omega^3}{\varkappa}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \quad ,$$

wenn, wie immer, r den inneren, R den äufseren Radius der Hohlkugel bezeichnet.

Digitized by Google

Es sei jetzt φ der Ausschlag der Nadel aus der Ruhelage, F das Trägheitsmoment derselben, dann sind ihre Schwingungen bestimmt durch die Gleichung:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{MT}{F}\varphi + 2\varepsilon\frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad .$$

Schreiben wir dieselbe

$$d\left(\frac{F\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}{2}\right) + d\left(\frac{MT\varphi^2}{2}\right) + 2\varepsilon F\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 dt = 0 \ ,$$

so sehen wir, daſs

$$2\varepsilon F\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 dt$$

die während dt erzeugte Wärme ist, und daſs wir also haben:

$$\varepsilon = \frac{4\pi}{3}\frac{M^2}{\varkappa F}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \quad .$$

Ist ε klein, so erhält man daraus für das logarithmische Dekrement der Nadel:

$$\lambda = \frac{4\pi^2}{3\varkappa}\cdot\frac{R-r}{Rr}\sqrt{\frac{M^3}{TF}} \quad .$$

Aperiodischer Zustand.

Damit der aperiodische Zustand eintrete, muſs sein:

$$\varepsilon^2 > \frac{MT}{F} \ ,$$

oder

$$\frac{R-r}{Rr} > \frac{3\varkappa}{4\pi}\sqrt{\frac{TF}{M^3}} \ ,$$

aus welcher Gleichung sich, bei gegebenen T, F, M, $\varkappa$, leicht die zur Erreichung des aperiodischen Zustandes nötige Dicke eines Dämpfers berechnen läſst.

Digitized by Google

3. Über die Verteilung der Elektricität auf der Oberfläche bewegter Leiter.

Aus Wiedemann's Annalen der Physik u. Chemie, Bd. 13, S. 266—275, 1881.

Werden elektrisch geladene Leiter gegeneinander bewegt, so ändert sich die Verteilung der freien Elektricität an der Oberfläche derselben von Augenblick zu Augenblick. Diese Anderung bedingt Strömungen im Inneren der Leiter, welche ihrerseits wieder Potentialdifferenzen zur Voraussetzung haben, sobald der spezifische Widerstand des Leiters nicht als verschwindend klein angenommen wird. Hieraus lassen sich die Folgerungen ziehen:

1. Dafs die Verteilung der Elektricität auf der Oberfläche bewegter Leiter in jedem Augenblicke eine andere ist als auf der Oberfläche ruhender, übrigens in gleicher Lage sich befindender Leiter, dafs insbesondere das Potential auf der Oberfläche und also auch im Inneren nicht mehr konstant ist, und dafs also ein bewegter Hohlkörper sein Inneres nicht völlig vor dem äufseren Einflusse schirmt.

2. Dafs die Bewegung geladener Leiter mit beständiger Wärmeentwickelung verbunden ist, dafs also kontinuierliche Bewegungen solcher Leiter nur möglich sind bei Zuführung äufserer Arbeit, und dafs unter dem Einflusse nur innerer Kräfte ein System solcher Leiter zur Ruhe kommen mufs.

Die Abänderungen, welche die Bewegung der Leiter an den Folgerungen der Elektrostatik nötig macht, sind besonders auffällig in den Fällen, in welchen sich die geometrische Oberfläche der Leiter nicht ändert, also bei Rotationskörpern, die um ihre Axe rotieren. Solche Körper (ebenso Flüssigkeitsstrahlen) werden bestrebt sein, in ihrer Nähe befindliche elektrische Körper der eigenen Bewegung folgen zu lassen.

Digitized by Google

Die Art und Gröfse der angedeuteten Erscheinungen soll im folgenden der Rechnung unterzogen werden.

Bei Aufstellung der Differentialgleichungen machen wir die Annahme, dafs die einzig mögliche Bewegungsart der Elektricität in einem Leiter der elektrische Strom sei. Verschwindet also ein Quantum freier Elektricität an einem Orte A und tritt an einem anderen B wieder auf, so statuieren wir ein Stromsystem zwischen A und B, nicht eine Bewegung der freien Elektricität von A nach B. Das ausdrückliche Hervorheben dieser Voraussetzung ist deshalb nicht überflüssig, weil sie einer naheliegenden Annahme widerspricht. Wird ein elektrischer Pol über eine ebene Platte in gleichbleibendem Abstande hingeführt, so folgt ihm die einmal erregte Elektrisierung, und die nächstliegende und auch wohl übliche Anschauung ist die, dafs die materiell gedachte Elektricität das Folgende sei, welche Annahme wir aber verwerfen zu Gunsten der oben genannten. Wir sehen ferner ab von allen Induktionswirkungen der erregten Ströme, was immer erlaubt sein wird, sobald nicht die Geschwindigkeit der bewegten Leiter von der Ordnung der Lichtgeschwindigkeit ist.

Seien u, v, w die Strömungskomponenten nach den Axen der x, y, z; φ das Gesamtpotential, h die Oberflächendichtigkeit, $\varkappa$ der spezifische Widerstand eines Leiters, alles gemessen im absoluten, elektrostatischen Mafse. $\varkappa$ ist also eine Zeit, und zwar die Zeit, in welcher eine im Inneren des Leiters beliebig verteilte Elektricitätsmenge auf ihren $e^{4\pi}$ten Teil herabsinkt. Beziehen wir uns zunächst auf ein Koordinatensystem, welches mit einem Leiter fest verbunden ist, und betrachten die Bewegung in diesem, so haben wir:

1) $$\varkappa u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad , \quad \varkappa v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad , \quad \varkappa w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad ,$$

2) $$\frac{d\Delta\varphi}{dt} = 4\pi \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right\} \quad ,$$

3) $$-\frac{dh}{dt} = u\cos a + v\cos b + w\cos c \quad ,$$

4) $$-4\pi h = \frac{\partial \varphi_i}{\partial n_i} + \frac{\partial \varphi_a}{\partial n_a} \quad ,$$

Digitized by Google

in welchen Gleichungen n_i die nach innen, n_a die nach aufsen gerichtete Normale und a, b, c die Winkel bezeichnen, welche n_i mit den Axen einschliefst. Aus 1) und 2) folgt:

$$\frac{d\Delta\varphi}{dt} = -\frac{4\pi}{\varkappa}\Delta\varphi \quad , \quad \text{also} \quad \Delta\varphi = (\Delta\varphi)_0 e^{-\frac{4\pi}{\varkappa}t} \quad .$$

Ist also die Dichtigkeit im Inneren anfänglich nicht Null, so nähert sie sich doch diesem Werte beständig und kann dann durch elektrostatische Einflüsse nicht wieder hervorgebracht werden; wir haben also auch hier:

$$\Delta\varphi = 0 \quad . \qquad 5)$$

Aus 1) und 3) folgt weiter:

$$\varkappa\frac{dh}{dt} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial n_i} \quad , \qquad 6)$$

oder mit Zuhilfenahme von Gleichung 4):

$$\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial n_i} + \frac{\partial\varphi_a}{\partial n_a}\right) = -\frac{\partial\varphi_i}{\partial n_i} \quad . \qquad 7)$$

In den Gleichungen 5) und 7) findet sich nur noch die Unbekannte φ. Gleichung 5) mufs im ganzen Raume, Gleichung 7) an allen leitenden Oberflächen erfüllt sein. Durch diese Gleichungen, welche einen Bezug auf ein besonderes Koordinatensystem nicht mehr enthalten, durch die bekannten Stetigkeitsbedingungen und durch einen Anfangswert ist φ für alle Zeiten eindeutig bestimmt. In dem Differentialquotienten dh/dt bezieht sich h auf ein bestimmtes Element der Oberfläche; sind die Geschwindigkeiten dieses Elementes in einem beliebigen Koordinatensysteme α, β, γ, so werden die obigen Gleichungen auf dieses Koordinatensystem bezogen, wenn man für dh/dt setzt:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \alpha\frac{\partial h}{\partial x} + \beta\frac{\partial h}{\partial y} + \gamma\frac{\partial h}{\partial z} \quad .$$

Für die während des Zeitelementes δt erzeugte Wärme erhält man:

$$\begin{aligned} \delta W &= \delta t \int \varkappa (u^2 + v^2 + w^2)\, d\tau \quad , \\ &= -\frac{1}{\varkappa}\delta t \int \varphi \frac{\partial\varphi_i}{\partial n_i} ds \quad , \\ &= -\int \varphi \delta h ds \quad , \end{aligned}$$

Digitized by Google

wo ds ein Element der Oberfläche ist, und das erste Integral über das Innere, die übrigen über die Oberflächen sämtlicher Leiter zu erstrecken sind. Man weist leicht in unserem besonderen Falle nach, dafs die angewandten Gleichungen dem Prinzipe von der Erhaltung der Kraft genügen, was indessen von denselben schon im allgemeinen gezeigt worden ist.

Ist $\varkappa$ sehr klein, so läfst sich φ nach Potenzen von $\varkappa$ entwickeln. Die einzelnen Glieder dieser Entwickelung können, wenn die Aufgabe der gewöhnlichen Elektrostatik als gelöst angesehen wird, in folgender Weise gefunden werden:

Sei φ_1 für alle Zeiten als Potential der vorhandenen Elektricität so bestimmt, wie es bei den vorhandenen Ladungen und den augenblicklichen Lagen dem Gleichgewichtszustande entsprechen würde, und sei h_1 die zu φ_1 gehörige Dichtigkeit. Es werde dann φ_2 so bestimmt, dafs überall $\Delta\varphi_2 = 0$ ist, dafs an der Oberfläche der Leiter $\partial\varphi_2/\partial n_i = \varkappa\partial h_1/\partial t$ ist, dafs die Stetigkeitsbestimmungen gewahrt sind, und dafs die Summe der freien Elektricität für jeden Leiter gleich Null ist. In derselben Weise wie φ_2 aus φ_1 abgeleitet ist, werde φ_3 aus φ_2 gebildet, φ_4 aus φ_3 und so fort; es ist klar, dafs dann $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots$ das exakte Potential darstellt, sobald die Reihe konvergiert. Die Konvergenz derselben hängt ab von dem Verhältnisse zwischen $\varkappa$, den Dimensionen der Leiter und ihren Geschwindigkeiten; für jedes $\varkappa$ lassen sich hinreichend kleine Geschwindigkeiten denken. Für metallische Leiter und irdische Geschwindigkeiten verschwindet jedes Glied völlig gegen das vorhergegangene, die besonderen Erscheinungen, welche der elektrische Widerstand hervorruft, sind hier nicht bemerkbar, und nur die Form der Strömungen ist von Interesse. Da φ_1 im Inneren der Leiter konstant ist, φ_3 gegen φ_2 verschwindet, so erfolgen die Strömungen überall in den Kraftlinien des Potentiales φ_2, und es ist:

$$\varkappa u = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} \quad , \quad \varkappa v = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} \quad , \quad \varkappa w = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} \quad .$$

Wir beschränken uns jetzt auf den Fall, dafs nur ein beweglicher Leiter vorhanden, und dafs derselbe ein um seine Axe sich drehender Rotationskörper ist. Wir beziehen die Rechnung auf ein im Raume ruhendes Koor-

Digitized by Google

dinatensystem, dessen z Axe die Rotationsaxe ist. Neben demselben benutzen wir Polarkoordinaten ϱ, ω, θ mit derselben Axe. Sei T die Dauer einer Umdrehung. Die Bedingungen, welchen φ in dem Leiter zu genügen hat, sind in diesem Falle: 1. im Inneren $\Delta\varphi = 0$; 2. an der Oberfläche $\partial\varphi_i/\partial n_i = \varkappa(\partial h/\partial t) + 2\pi\varkappa/T.\,\partial h/\partial\omega$, worin sich jetzt h auf einen im Raume ruhenden Punkt bezieht. Rotiert der Leiter mit gleichbleibender Geschwindigkeit unter dem Einflusse eines von der Zeit unabhängigen Potentiales, so tritt nach einiger Zeit ein stationärer Zustand ein; die Bedingung desselben ist $\partial h/\partial t = 0$, und also: $\partial\varphi_i/\partial n_i = 2\pi\varkappa/T.\,\partial h/\partial\omega$.

Als ein Beispiel wollen wir eine Hohlkugel behandeln, welche mit gleichbleibender Geschwindigkeit um einen ihrer Durchmesser sich dreht. Sei ihr äusserer Radius R, ihr innerer r. Das fremde Potential Φ, unter dessen Einflusse die Bewegung stattfindet, sei für das Innere der Hohlkugel nach Kugelfunktionen entwickelt. Die Wirkungen, welche die einzelnen Glieder hervorrufen, lassen sich addieren, wir können deshalb die Betrachtung auf eins derselben beschränken, und sei also $\Phi = A_{ni}(\varrho/R)^n \cos i\omega P_{ni}(\theta)$. Es werde jetzt mit φ das Eigenpotential der auf der Hohlkugel induzierten Elektricität bezeichnet, und zwar mit φ_1 im inneren Hohlraume, mit φ_2 in der Masse der Hohlkugel, mit φ_3 im äusseren Raume. Aufser den allgemeinen Bestimmungen für das Potential elektrischer Belegungen hat dann φ noch der Bedingung zu genügen, dafs für $\varrho = r$ und für $\varrho = R$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varrho} + \frac{\partial\varphi_i}{\partial\varrho} = -\frac{\varkappa}{2T}\frac{\partial}{\partial\omega}\left\{\frac{\partial\varphi_i}{\partial\varrho} - \frac{\partial\varphi_a}{\partial\varrho}\right\} .$$

Allen diesen Anforderungen genügen wir, wenn wir setzen:

$$\varphi_1 = \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n (A\cos i\omega + B\sin i\omega) P_{ni}\theta + \left(\frac{\varrho}{r}\right)^n (A'\cos i\omega + B'\sin i\omega) P_{ni}\theta ,$$

$$\varphi_2 = \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n (A\cos i\omega + B\sin i\omega) P_{ni}\theta + \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{n+1} (A'\cos i\omega + B'\sin i\omega) P_{ni}\theta ,$$

$$\varphi_3 = \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} (A\cos i\omega + B\sin i\omega) P_{ni}\theta + \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{n+1} (A'\cos i\omega + B'\sin i\omega) P_{ni}\theta .$$

Denn die allgemeinen Bedingungen sind so ohne weiteres erfüllt, und die beiden Grenzgleichungen ergeben, nach $\sin i\omega$

Digitized by Google

und $\cos i\omega$ zerlegt, vier lineare Gleichungen für die vier Konstanten A, B, A', B', durch deren Erfüllung ihre eigene bedingt ist. Mit Benutzung der Abkürzungen $\varkappa / 2T = \alpha$, $r/R = \varepsilon$, werden diese Gleichungen:

$$\begin{aligned}
A_{ni}\, n &= -nA - (2n+1)\,\alpha i B + (n+1)\,\varepsilon^{n+1} A' \quad * \\
0 &= (2n+1)\,\alpha i A \quad - nB \quad * \quad + (n+1)\,\varepsilon^{n+1} B' \\
A_{ni}\, n\varepsilon^n &= -n\varepsilon^n A \quad * \quad + (n+1)\,A' \quad + (2n+1)\,\alpha i B' \\
0 &= \quad * \quad - n\varepsilon^n B - (2n+1)\,\alpha i A' + (n+1)\,B' \quad .
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen bestimmen die vier Konstanten eindeutig. Auch ohne die etwas weitläufige Auflösung durchzuführen, überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der folgenden Bemerkungen:

1. Ist $\alpha = 0$, so ist $A = -A_{ni}$, $A' = B' = B = 0$, wie es sein mufs für die ruhende Kugel.

2. Ist α endlich aber sehr klein, so ist $A + A_{ni}$ und A' von der Ordnung von α^2, B und B' von der Ordnung α, daraus ergiebt sich das Folgende als das Wesentliche der Erscheinung: Die Form der Belegung auf der äufseren Grenzfläche (die Form der Linien gleicher Dichtigkeit) ist durch die Rotation nicht geändert (natürlich nur für die einzelnen Glieder der Entwickelung); die Belegung erscheint aber gedreht im Sinne der Rotation um einen Winkel von der Ordnung von α, ihre Dichtigkeit hat abgenommen um ein Kleines von der zweiten Ordnung. Neben ihr tritt jetzt auch auf der Kugelfläche, welche die innere Grenze bildet, eine Belegung auf, deren Form dieselbe ist, wie die der ersteren, deren Dichtigkeit von der Ordnung von α ist, und welche bis auf ein Unendlichkleines gegen jene um den Winkel $\pi / 2i$ gedreht erscheint. In der Masse der Hohlkugel und im Inneren treten Potentialdifferenzen von der Ordnung von α auf.

3. Ist α grofs, so sind B und B' von der Ordnung $1/\alpha$, A und A' von der Ordnung $1/\alpha^2$. Bei wachsender Drehungsgeschwindigkeit erscheint also schliefslich die Belegung der äufseren Grenze gedreht um den Winkel $\pi / 2i$, ihre Intensität ist klein von der Ordnung $1/\alpha$, mit ihr stimmt nach Form, Lage und Intensität überein die Belegung der inneren Kugelgrenze. Für den Grenzzustand ist überall $\varphi = 0$,

Digitized by Google

es herrscht dann in der Masse und im Inneren der Hohlkugel das äufsere Potential, die Strömung erfolgt überall in den Kraftlinien des letzteren. Die infolge der Strömung an die Grenze gebrachte freie Elektricität wird durch den Umschwung der Kugel an ihren Ausgangspunkt zurückgetragen, und zwar so schnell, dafs die Dichtigkeit verschwindend klein bleibt. Ein Schutz des inneren Hohlraumes findet nicht mehr statt.

In besonderen Fällen wird auch die Rechnung sehr einfach. Handelt es sich zunächst um eine Vollkugel, so ist $\varepsilon = 0$, setzen wir dann $\operatorname{tg}\delta = (2n+1)\,\alpha i/n$, so ist δ/i der Winkel, um welchen die Belegung gedreht erscheint, und die Intensität der Belegung verhält sich zu der auf der ruhenden Kugel induzierten wie $\cos\delta : 1$. Rotiert die Kugel unter dem Einflusse einer zur Drehungsaxe senkrechten, gleichförmigen Kraft, so wird die Verteilung der Elektricität auf ihr durch eine Kugelfunktion ersten Grades dargestellt, die Strömungslinien sind dann parallele Grade, deren Richtung bei kleiner Drehungsgeschwindigkeit senkrecht zur Axe und zur Kraft ist, bei gröfseren gegen diese Richtung gedreht erscheint um einen Winkel, dessen Tangente $= 3\alpha = \frac{3}{2}\varkappa/T$ ist. Für einen rotierenden Cylinder sind die Verhältnisse ganz ähnliche, die Tangente des Drehungswinkels wird hier gleich $2\alpha = \varkappa/T$ gefunden.

Es sei zweitens ε sehr nahe gleich 1, die Dicke d der Hohlkugel also verschwindend klein. Wir müssen dann den spezifischen Widerstand $\varkappa$ so klein annehmen, dafs $\varkappa/d = k$ eine endliche Gröfse, der spezifische Widerstand der Fläche ist. Unter dieser Voraussetzung wird die Tangente des Drehungswinkels allgemein $\operatorname{tg}\delta = (2n+1)\,i/2n(n+1).kR/T$ und im besonderen für eine gleichförmige Kraft $\operatorname{tg}\delta = \frac{3}{4}kR/T$.

Unter gleichen Verhältnissen findet man für einen dünnen Hohlcylinder $\operatorname{tg}\delta = kR/T$, in diesem Falle ist also die Drehung gröfser am Cylinder, als an der Kugel, während sie am massiven Cylinder kleiner war. Die Dichtigkeit verhält sich auch in den zuletzt genannten Fällen zu der auf der ruhenden Kugel wie $\cos\delta : 1$.

Zur Veranschaulichung der Rechnungsresultate ist in Fig. 16 die elektrische Bewegung in einem rotierenden Hohlcylinder

Digitized by Google

dargestellt, dessen innerer Radius gleich der Hälfte des äufseren ist, und dessen Umlaufszeit gleich dem Doppelten des spezifischen Widerstandes des Materials ist. Der Pfeil A giebt die Richtung der äufseren induzierenden Kraft, der Pfeil B die Richtung der Kraft im Hohlraum, die beiden anderen Pfeile geben die Stellung der Belegungen auf der äufseren und inneren Mantelfläche. Die Linien, welche die Masse des Hohlcylinders füllen, stellen die Stromlinien dar.

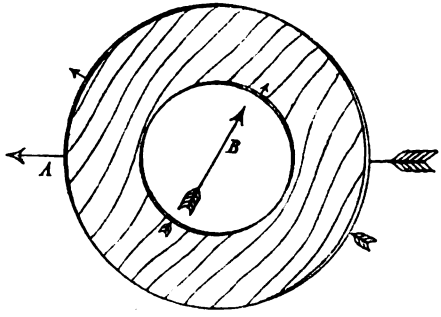


Fig. 16.

Es erübrigt noch zu untersuchen, in welchen praktisch realisierbaren Fällen die besprochenen Wirkungen bemerkbar werden können. Dieselben erreichen offenbar dann eine meſsbare Gröfse, wenn der Drehungswinkel einen meſsbaren Wert erreicht, und dies ist dann der Fall, wenn bei massiven Körpern die Gröfse $\varkappa / T$, oder bei sehr dünnen Schalen die Gröfse $k R / T$ einen endlichen Wert besitzt, wo jetzt R nur den mittleren Abstand der Schale von der Drehungsaxe bezeichnet. Da die Gröfse T nicht wohl kleiner als $^1/_{100}$ Sekunde werden kann, so muſs $\varkappa$ mindestens einige Hundertstel Sekunde betragen. Daraus ist ersichtlich, daſs in metallischen Leitern, für welche $\varkappa$ in den Trillionteln einer Sekunde liegt, die Drehungserscheinung nicht bemerkbar werden kann. Andererseits erhellt, daſs bei Isolatoren, wie Schellack und Paraffin, bei welchen $\varkappa$ viele Tausend Sekunden beträgt, schon bei mäſsigen Geschwindigkeiten eine bemerkbare Belegung überhaupt sich nicht bilden kann. Dagegen würden an gewissen anderen Körpern, die an der Grenze zwischen Halbleitern und schlechten Leitern stehen, sich die Erscheinungen vollständig darstellen lassen, so an den gewöhnlichen Glassorten, an Gemengen der Nichtleiter mit pulverförmigen Leitern, an Flüssigkeiten von der Leitungsfähigkeit des Petroleums, Terpentinöls oder Mischungen dieser Flüssigkeiten mit besser leitenden etc.

Digitized by Google

Da der spezifische Widerstand $\varkappa$ in einfacher Weise mit dem Drehungswinkel zusammenhängt, so wäre die Beobachtung des letzteren ein Mittel zur Bestimmung des ersteren. Indessen tritt bei Körpern von dem erforderlichen Widerstand schon die Erscheinung des Rückstandes auf, und unsere Differentialgleichungen haben für dieselben nur angenäherte Gültigkeit. Die Wirkung der Rückstandsbildung wird in allen Fällen die sein, dafs die Konstante $\varkappa$ kleiner erscheint, als sie aus der Beobachtung einer stationären Strömung gefunden wird, und zwar um so kleiner, je gröfser die Geschwindigkeit der Bewegung ist. In gleichem Sinne wirkt auch die dielektrische Bewegung, da dieselbe einer partiellen Leitung ohne Widerstand äquivalent ist. Bei sehr dünnen Schalen fallen die erwähnten störenden Einflüsse fort.

Frühere Versuche, welche eine Erläuterung der abgeleiteten Wirkungen geben, sind mir nicht bekannt, ich habe deshalb selber den folgenden angestellt. Über einer relativ gut leitenden Platte von Spiegelglas (es war auf anderem Wege $\varkappa = 4$ Sekunden gefunden) liefs ich an einem Drahte eine 10 cm lange Nadel Torsionsschwingungen ausführen, der durch Gewichte ein hinreichendes Trägheitsmoment gegeben worden war, und welche an ihren Enden zwei horizontale, 3 cm lange, 2 cm breite Messingplättchen trug. Der Abstand a der letzteren von der Glasplatte wurde verschieden gewählt. Wurde die Nadel elektrisch geladen, so wirkten die Messingplatten auf die gegenüberliegende Glasfläche als Kondensatoren, die gebundene Elektricität war gezwungen, der Bewegung der Nadel zu folgen, und mufste nach dem vorigen die Schwingung der Nadel dämpfen. Eine solche Dämpfung zeigte sich nun in der That. Wurde die Nadel mit einer Leidener Flasche in Verbindung gesetzt, deren Schlagweite $^1/_2$ mm betrug, während $a = 2$ mm war, so ging die vorher frei bewegliche Nadel ohne weitere Schwingung in ihre Ruhelage zurück, und noch wenn $a = 35$ mm gemacht wurde, war die Zunahme der Dämpfung im Moment der Ladung mit bloſsem Auge zu bemerken. Aber auch, als ich die Nadel nur durch 50 Daniell'sche Elemente lud, während $a = 2$ mm war, erhielt ich eine mit Spiegel und Scala leicht wahrnehmbare Zunahme der Dämpfung. Es war nicht möglich, den

Digitized by Google

Versuch einer genauen Rechnung zu unterwerfen; mittels einiger vereinfachenden Annahmen konnte ich mich indessen überzeugen, dafs aus der Theorie ein Wert des logarithmischen Dekrements folgte, der von der Ordnung des beobachteten war.

Wie gezeigt ist, besitzen wir in einem Leiter, der unter dem Einflusse äufserer Kräfte rotiert, einen Körper, auf dessen Oberfläche das Potential verschiedene Werte besitzt und nach kleinen Störungen wieder annimmt. Verbinden wir daher zwei Punkte der Oberfläche leitend, so kreist durch die Verbindung ein Strom, verbinden wir die Punkte mit zwei Konduktoren, so können dieselben beliebig oft auf ein verschiedenes Potential gebracht werden. Wenden wir als rotierende Körper Metallscheiben an, so sind bei erreichbaren Drehungsgeschwindigkeiten die Potentialdifferenzen unendlich klein, wählen wir hingegen sehr schlechte Leiter, so sind die Potentialdifferenzen schon bei mäfsigen Geschwindigkeiten von der Ordnung der induzierenden. Auf dieser Grundlage beruhen die Influenzmaschinen ohne metallische Belegung. Die theoretisch einfachste derartige Maschine ist ein unter dem Einflusse einer konstanten Kraft rotierender Cylinder. Wie weit allerdings die hier angedeutete Erklärung eine vollständige ist, mufs einstweilen dahingestellt sein.

Digitized by Google

4. Obere Grenze für die kinetische Energie der bewegten Elektricität.

Aus Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie, Bd. 14, S. 581—590, 1881.

In einer früheren Arbeit[1]) habe ich aus Versuchen über die Intensität von Extraströmen die Folgerung ziehen können, dafs die kinetische Energie der elektrischen Strömung von der magnetischen Dichte 1 in einem kupfernen Leiter kleiner sei als 0,008 mg mm²/sec². Diese Folgerung konnte indessen nur unter der Voraussetzung gezogen werden, dafs eine gewisse Beziehung zwischen dem spezifischen Widerstande der Metalle und der Dichte der Elektricität in ihnen nicht bestehe. In der vorliegenden Arbeit will ich einen Versuch beschreiben, den ich gleichfalls in der Absicht, eine kinetische Energie der Strömung nachzuweisen, und gleichfalls mit negativem Resultate angestellt habe, welcher aber vor den früheren Versuchen die Vorteile bietet, erstens direkter zu sein, zweitens einen kleineren Wert für die obere Grenze zu liefern, und drittens, diesen Wert ohne weitere Beschränkung zu ergeben.

Es sei eine dünne Metallplatte von der in Fig. 17 dargestellten Form zwischen den Elektroden A und B durchflossen von einem Strome von möglichst grofser Dichtigkeit, es seien ferner die Punkte C und D mit einem feinen Galvanometer verbunden und das System so reguliert, dafs kein Strom das Galvanometer durchfliefst. Wird nun die Platte um eine durch ihren Mittelpunkt gehende, zu ihrer Ebene senkrechte Axe in Rotation versetzt, so mufs, falls sich die Elektricität mit träger Masse bewegt, die Strömung von der

[1]) [Siehe No. 1, S. 1.]

Digitized by Google

Richtung AB seitlich abzuweichen bestrebt sein, aus derselben mechanischen Ursache, welche auf der rotierenden Erde die Passatwinde von der Richtung des Meridians abweichen läfst. Die Folge dieses Bestrebens ist eine Potentialdifferenz zwischen den Punkten C und D oder ein Strom im Galvanometer. Dieser Strom mufs seine Richtung ändern mit der Richtung der Drehung; ist diese Richtung die des Uhrzeigers und geht gleichzeitig der Strom in der Platte von A nach B, so mufs er die Galvanometerleitung aufserhalb der Platte von D nach C durchfliefsen, wie es die Pfeile andeuten.

Qualitativ mufs die genannte Wirkung eintreten, welches auch die Natur des galvanischen Stromes ist, vorausgesetzt nur, dafs mit demselben eine solche Bewegung träger Masse verbunden ist, welche mit der Richtung des Stromes ihre eigene Richtung ändert. Die Schwierigkeit des Versuches besteht in der Herstellung von vier hinreichend sicheren und ruhigen Zuleitungen bei schneller Rotation; diese Schwierigkeit habe ich so weit überwunden, dafs gleichzeitig eins der feinsten Galvanometer, eine Geschwindigkeit von 30 Umdrehungen in der Sekunde und eine Potentialdifferenz von 1 Daniell zwischen A und B benutzt werden konnte. Dabei war eine Ablenkung der Nadel, welche einer trägen Masse entsprechen würde, nicht nachzuweisen; lege ich die Weber'sche Anschauung zu Grunde, so kann ich mittels der unten angegebenen Betrachtung aus meinen Versuchen die Folgerung ziehen, dafs die kinetische Energie μ einer Strömung von der magnetischen Dichte 1 in einem Kubikmillimeter eines silbernen Leiters die Gröfse von 0,00002 mg mm^2/sec^2 nicht wesentlich überschreiten kann.

In Bezug auf die Ausführung des Versuches ist das Folgende zu erwähnen. Als Metallplatte wählte ich die Belegung einer nach dem Liebig'schen Verfahren versilberten Glasplatte, die Form derselben ist in Fig. 17 dargestellt, die Entfernung AB betrug etwa 45 mm, die Entfernung CD 25 mm. Die Zuleitungsdrähte waren zunächst an Platinplättchen angelötet, diese wurden mittels kleiner Schrauben, die das Glas durchsetzten, gegen die Belegung angepreſst; um eine gleichmäfsigere Berührung zu erzielen, war zwischen die Belegung und die Plättchen eine Schicht Goldschaum gebracht. Der elektrische Widerstand war anfangs gleich 5,4 S.-E. in der Richtung AB

Digitized by Google

und gleich 3,5 S.-E. in der Richtung *CD*, aus unbekannten Gründen nahmen diese Widerstände mit der Zeit ab und wurden nach einigen Wochen resp. gleich 4,8 S.-E. und 3,1 S.-E. gefunden. Aus dem Verhältnisse dieser Widerstände und aus besonderen Versuchen war zu ersehen, dafs der Übergangswiderstand an den Zuleitungen keinen wesentlichen Teil des gesamten Widerstandes bildete. Die Regulierung des Systemes zu dem Zwecke, die Nadel auf Null zu bringen, geschah zunächst durch Abschaben des Silbers an einzelnen Stellen des Randes; da indessen eine dauernde Abgleichung von hinreichender Schärfe aus verschiedenen Ursachen unmöglich war, so schaltete ich zwischen *A* und *C* und zwischen *C* und *B* Zweigleitungen von einigen Hundert S.-E. Widerstand ein, durch deren Abgleichung die Nadel jederzeit, soweit es überhaupt wünschenswert schien, auf Null zurückgeführt werden konnte.

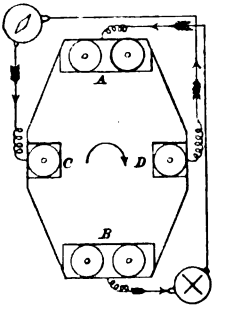


Fig. 17.

Um eine geschwinde Rotation der Glasplatte zu ermöglichen, war dieselbe auf einer Messingscheibe befestigt, die belegte Fläche war der Scheibe zugekehrt und nur durch eine möglichst dünne Luftschicht von derselben getrennt. Die Scheibe ihrerseits bildete das eine Ende einer horizontalen stählernen Axe, die in zwei Lagern so befestigt war, dafs ihre beiden Enden zugänglich blieben. Die Zuleitung zum Galvanometer fand unmittelbar an der Glasplatte statt, die Zuleitung zur stromgebenden Kette am anderen Ende der Axe, die Leitungen von hier bis zu den Punkten *A* und *B* waren gebildet durch die Axe selbst und durch einen in einer Durchbohrung der Axe liegenden Draht. Die Vorrichtung, durch welche auf jedem Ende der letzte Übergang von den bewegten zu den ruhenden Teilen vermittelt wurde, ist in Fig. 18 dargestellt. Durch ein genau centriertes Stück einer sehr dünn ausgezogenen Glasröhre ist ein feiner Platindraht geführt, ein zweiter Platindraht ist um die Glasröhre herumgeschlungen, die Röhre mit den Drähten durchsetzt ein Quecksilbergefäfs und mündet in einen zweiten derart, dafs in dem Quecksilber des letzteren der erstgenannte und im Queck-

Digitized by Google

silber des ersteren der letztgenannte Draht rotiert. Das Glasröhrchen war mittels Siegellackes auf der einen Seite der Axe gegen die Glasplatte, auf der anderen an der Axe selbst befestigt. Da der Durchmesser der Windungen des Drahtes B nur ungefähr $^1/_2$ mm betrug, so bewegte sich das Platin gegen das umgebende Quecksilber auch bei einer Rotationsgeschwindigkeit von 100 Umdrehungen in der Sekunde nur mit einer Geschwindigkeit von 160 mm/sec. Der Erfolg war ein guter, denn auch bei der genannten Geschwindigkeit zeigte sich kein Übergangswiderstand, und die durch Erwärmung erzeugten Störungen waren eben wahrnehmbar und klein gegen andere unvermeidliche. Die Rotation wurde der Axe mitgeteilt durch einen Schnurlauf, welcher sie mit der schnellsten Axe eines Becquerel'schen Phosphoroskopes verband, sodafs sie doppelt so schnell als jene lief. Die Kurbel des Phosphoroskopes wurde mit der Hand gedreht, einer Umdrehung derselben entsprachen 290 Umdrehungen der Axe. Da die ganze Vorrichtung so leicht als möglich gebaut war, konnten auch grofse Geschwindigkeiten schnell erzeugt und wieder aufgehoben werden. Das angewandte Galvanometer war ein Siemens'sches mit einem astatischen Systeme von zwei Glockenmagneten und vier Rollen von zusammen ca. 7 S.-E. Widerstand. Die Astasie konnte durch äufsere Magnete beliebig weit getrieben werden, bei den definitiven Versuchen war die Empfindlichkeit eine solche, dafs einer Potentialdifferenz von ein Milliontel Daniell an den Punkten D und C ein Ausschlag von 32 Skalenteilen entsprach. Dabei war die Bewegung der Nadel aperiodisch, eine neue Ruhelage nahm dieselbe nach etwa 8 Sekunden mit einer für die vorliegenden Versuche hinreichenden Genauigkeit an. Der Strom wurde geliefert durch ein Daniell'sches Element und mittels einer gewöhnlichen Tangentenbussole gemessen. In die Leitung zum Galvanometer und zur Kette war je ein Kommutator eingeschaltet.

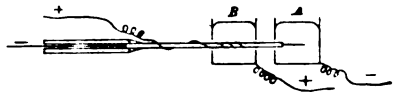


Fig. 18.

Nachdem der Strom so lange durch die Platte geleitet war, dafs eine weitere Erwärmung derselben nicht stattfand,

Digitized by Google

wurde mittels der äufseren Widerstände zwischen *A*, *C* und *B* die Nadel des Galvanometers nahezu in ihre natürliche Ruhelage gebracht. Es wurde sodann der Kurbel des Phosphoroskopes eine möglichst gleichmäfsige einmalige Umdrehung erteilt, die im Durchschnitte 8—9 Sekunden erforderte und durch eine automatische Arretierung ihr Ende erreichte. Dabei wich die Nadel im allgemeinen von der Ruhelage aus, ihre Stellung zu Ende der Rotation wurde notiert. Nach Aufhören der Rotation ging indessen die Nadel fast nie in die ursprüngliche Ruhelage zurück, sondern in eine neue Ruhelage über, die, sobald sie erreicht war, nach etwa 6—8 Sekunden, gleichfalls abgelesen wurde. Den Abstand derselben von der ursprünglichen will ich den dauernden Ausschlag nennen; unter augenblicklichem Ausschlag soll verstanden sein der Abstand der Stellung der Nadel zu Ende der Rotation vom Mittel zwischen der ursprünglichen und der schliefslichen Ruhelage. Den augenblicklichen Ausschlag wollen wir ansehen als Mafs desjenigen Stromes, dessen Ursachen nur während der Rotation wirken, wie z. B. der Einfluſs träger Masse; während der dauernde Ausschlag den nach Beendigung der Rotation noch andauernden Störungen zugeschrieben werde. Anspruch auf Genauigkeit hätte diese Rechnungsweise nur dann, wenn die Rotation eine gleichförmige und der dauernde Ausschlag klein wäre, was beides in den Versuchen nicht zutraf, indessen waren die Störungen zu mannigfaltig und die Ausschläge zu unregelmäfsig, als dafs eine nähere Diskussion möglich gewesen wäre.

Schon die ersten Versuche zeigten nun, dafs ein Einfluſs träger Masse, welcher die unvermeidlichen Störungen bedeutend überwöge, jedenfalls nicht vorhanden war. Um einen solchen dennoch nachzuweisen, resp. einen möglichst kleinen Wert der oberen Grenze zu finden, stellte ich immer einen Satz von acht Beobachtungen zusammen, bei welchen die Richtung der Drehung von Beobachtung zu Beobachtung, die Richtung der Leitung zum Galvanometer von je zwei zu zwei Beobachtungen, endlich die Richtung des Stromes in der Platte von den vier ersten gegen die vier letzten Beobachtungen abwechselte. Ein solches System von acht Beobachtungen will ich einen Versuch nennen. Durch passende Kombination der Beobachtungen

Digitized by Google

liefs sich nun für jeden Versuch die mittlere Wirkung der einzelnen störenden Ursachen berechnen. Es mufste sich nämlich in den Ausschlägen vorfinden und aus denselben eliminieren lassen:

1) ein Teil, welcher sein Vorzeichen ändert nur mit der Umschaltung der Leitung zum Galvanometer, nicht mit der Richtung der Drehung oder der Leitung zur Kette. Derselbe konnte seinen Ursprung nur in einer durch die schnelle Rotation erzeugten elektromotorischen Kraft in der Kontaktstelle zur Galvanometerleitung haben. Insofern diese Kraft eine thermoelektrische war, mufste der entsprechende Ausschlag ein dauernder sein.

2) ein Teil, dessen Zeichen abhing von der Richtung der Leitung zum Galvanometer und zur Kette, hingegen nicht von der Richtung der Drehung. Derselbe konnte verschiedene Ursachen haben:

a) die Spannung der Platte infolge der beträchtlichen Centrifugalkraft, die Wirkung kann nur im augenblicklichen Ausschlage erscheinen;

b) eine gleichmäfsige Temperaturänderung der ganzen Platte infolge der Rotation, die Wirkung erscheint im dauernden Ausschlag;

c) eine Änderung der Verhältnisse der Widerstände AC/BC und AD/BD während der Dauer der Beobachtung aus anderweitigen Ursachen. In der That änderte sich die Ruhelage der Nadel, auch wenn keine Rotation stattfand, langsam, aber stetig und stark genug, dafs der dadurch verursachte Fehler von der Ordnung der übrigen war. Die Wirkung macht sich im dauernden Ausschlag geltend.

3) ein Teil, dessen Vorzeichen aufser von den Richtungen der Leitungen auch von der Richtung der Rotation abhängt:

a) käme im augenblicklichen Ausschlage ein solcher Teil vor, so wäre für denselben wohl keine andere Ursache anzugeben, als eine Trägheit der bewegten Elektricität;

b) im dauernden Ausschlage kann ein solcher Teil dadurch entstehen, dafs bei der Rotation zwei diagonal gegenüber liegende Zweige der Brücke vorangehen, zwei andere folgen, erstere sich also infolge des Luftzuges stärker als

Digitized by Google

letztere abkühlen. Da die leitende Silberschicht der Messingscheibe sehr dicht anlag, hatte ich eine solche Wirkung nicht vermutet, sie zeigte sich aber zunächst sehr stark und war um so unbequemer, als sie sich von der Wirkung einer trägen Masse nur durch ihr Andauern nach beendigter Rotation unterschied. Indem ich die Platte und Messingscheibe mit Baumwolle und einer Papiertrommel umgab, verminderte ich die Störung beträchtlich, eine weitere Verminderung trat ein, als ich das Innere der Papiertrommel durch einen derselben gegebenen Paraffinüberzug hermetisch abschlofs. Ganz blieb diese Störung eigentümlicherweise auch so nicht aus.

Von den beschriebenen Versuchen habe ich zwei Reihen zu je 20 Versuchen angestellt. Dieselben unterschieden sich durch die Intensität des angewandten Stromes, die Empfindlichkeit des Galvanometers und vorzüglich dadurch, dafs bei der ersteren der erwähnte Paraffinüberzug noch fehlte. Die zweite war bei weitem die bessere und soll daher nur von ihr die Rede sein. Auf sie bezieht sich die Angabe, die oben über die Empfindlichkeit des Galvanometers gemacht ist. Die Intensität des Stromes betrug im magnetischen Mafse 1,17 $mg^{\frac{1}{2}}$ $mm^{\frac{1}{2}}/sec$; die Rotationsgeschwindigkeit nach dem obigen durchschnittlich $290/8\frac{1}{2} = 34$ Umdrehungen in der Sekunde. Der Ausschlag des Galvanometers am Ende der Drehung betrug im Mittel 10 bis 15 Skalenteile und änderte sich in den folgenden Sekunden meist nur um wenige Skalenteile. Der gröfste Teil dieses Ausschlages entsprach den nicht mehr zu trennenden Ursachen 2b) und 2c); die Wirkung der Störungen 1) und 3b) ergab sich etwa zu 2 bis 4 Skalenteilen, die Störung 2a) war klein. Die Brauchbarkeit der Methode zeigte sich darin, dafs die einzelnen Störungen aus allen Versuchen fast ausnahmslos mit gleichen Zeichen und von gleicher Gröfsenordnung gefunden wurden. Die 20 Werte, welche für den unter 3a) angeführten Teil des Ausschlages erhalten wurden, sind in Skalenteilen die folgenden:

+3,6,	−1,0,	−0,0,	−2,7,	−1,1,	+0,1,	−0,6,
+0,8,	−1,1,	+0,2,	−0,4,	+0,5,	+0,7,	+0,5,
+0,8,	+1,2,	+1,1,	+0,7,	+0,6,	+0,7.	

Das Mittel dieser Werte ist + 0,23. Die Abweichung

Digitized by Google

von Null ist etwas gröfser als der wahrscheinliche Fehler des Resultates, indessen dürfte die Ursache der Abweichung eher in der bis zu einem gewissen Grade willkürlichen Berechnung des augenblicklichen Ausschlages, als in einer physikalischen Ursache zu finden sein. Der Einfluſs einer trägen Masse muſste nach den Umständen des Versuches und den benutzten Vorzeichen einen negativen Ausschlag zur Folge haben, ein solcher Einfluſs war also durchaus nicht nachzuweisen. Setzt man den konstanten Ausschlag von 0,23 auf Rechnung einer anderen Ursache und berechnet die Fehler der Versuche von Null an, so ergiebt sich immer noch eine Wahrscheinlichkeit von 14 gegen 1, daſs kein Ausschlag gröfser als $\frac{1}{2}$ Skalenteil, und von 3480 gegen 1, daſs kein Ausschlag gröfser als 1 Skalenteil vorhanden war, der einer trägen Masse hätte zugeschrieben werden können.

Bei der Berechnung der Versuche unter Zugrundelegung der Weber'schen Hypothese mache ich der Einfachheit halber die Annahme, daſs die Masse einer positiven Einheit gleich der Masse einer negativen Einheit sei, und daſs im elektrischen Strome beide Elektricitäten mit entgegengesetzt gleicher Geschwindigkeit flieſsen. Es sei m die Masse der elektrostatischen Einheit, v die Geschwindigkeit, mit welcher sie gezwungen ist, sich in der Axe der Platte AB oder in einer dieser Axe parallelen Geraden zu bewegen, ω die Rotationsgeschwindigkeit der Platte. Dann ist die aus der Rotation entspringende scheinbare Kraft, welche auf die Einheit senkrecht zur Bahn derselben wirkt, gleich $2mv\omega + C$, wenn C die dem Orte der Einheit entsprechende Komponente der Centrifugalkraft ist. Die entgegengesetzte Einheit, welche sich am gleichen Orte befindet, erleidet in gleicher Richtung die Kraft $-2mv\omega + C$. Die Summe beider Kräfte $2C$ stellt eine ponderomotorische Kraft dar, nämlich diejenige Zunahme der auf die Masse des Leiters wirkenden Centrifugalkraft, welche aus der Vermehrung dieser Masse um die Masse der Elektricität folgt; die Differenz aber, nämlich $X = 4mv\omega$ ist eben die elektromotorische Kraft, welche wir im Galvanometer zu bemerken suchten. Nun ist m gleich der Masse M der gesamten in einem Kubikmillimeter enthaltenen positiven und negativen Elektricität, dividiert durch die Anzahl der in einem Kubik-

Digitized by Google

millimeter enthaltenen elektrostatischen Einheiten; diese Anzahl wiederum ist gleich der elektrostatisch gemessenen Stromdichte i, dividiert durch die Geschwindigkeit v, also ist $m = Mv/i$ und $X = 4\omega \cdot Mv^2/i = 4i\omega \cdot Mv^2/i^2$. Wir können nun, ohne die Gleichung zu ändern, rechts und links magnetisches Maſs einführen; thun wir dies, so ist $Mv^2/i^2 = Mv_0^2/i_0^2$ diejenige Gröſse, welche in der Einleitung mit μ bezeichnet ist, und also $X = 4\mu i\omega$. Hierin ersetzen wir noch die Stromdichte i durch den Quotienten aus der Gesamtintensität J und dem Querschnitt q der Leitung, ferner die elektromotorische Kraft X durch den Quotienten aus der Potentialdifferenz φ zwischen den Punkten C und D und der Breite b der Platte; nennen wir noch die mittlere Dicke derselben d, so wird jetzt $\varphi = 4\mu J\omega b/q = 4\mu J\omega/d$, oder, da wir μ suchen:

$$\mu = \frac{\varphi q}{4Jb\omega} = \frac{\varphi d}{4J\omega} \quad .$$

Den Querschnitt q oder die Dicke d können wir angenähert aus der Menge des niedergeschlagenen Silbers berechnen, rationeller und genauer zugleich ist es, ihn aus dem elektrischen Widerstande der Platte zu bestimmen, denn dieser Widerstand hängt unmittelbar von der mittleren Geschwindigkeit ab, mit welcher sich die Elektricität in der Platte bewegt, und eben diese Geschwindigkeit und nur mittelbar der Querschnitt ist die Gröſse, auf welche es ankommt. Da die Leitung unzweifelhaft eine metallische war, können wir für den spezifischen Widerstand der leitenden Substanz nur den des Silbers setzen; aus der Länge der Platte $= 45$ mm und dem Widerstand $= 5{,}1$ S.-E. im Mittel ergiebt sich der für uns in Betracht kommende Querschnitt $q = 0{,}00014$ mm^2 und die entsprechende Dicke $d = 5{,}6\ 10^{-6}$ mm. Allerdings ist diese Dicke nur etwa ein Zehntel derjenigen, welche man aus der Menge des niedergeschlagenen Silbers erschlieſsen konnte, indessen zeigt dies nur, was von vornherein wahrscheinlich war, daſs das Silber sich sehr ungleichförmig auf dem Glase verteilt. Wendet man den gefundenen Wert der Dicke an und setzt auſserdem $J = 1{,}17$ mg$^{\frac{1}{2}}$ mm$^{\frac{1}{2}}$ sec^{-1}, $\omega = 2\pi \cdot 34$ sec^{-1}, $\varphi = 1$ Skalenteil $= 1\ 32$ Milliontel Daniell $= 3300$ mg$^{\frac{1}{2}}$ mm$^{\frac{3}{2}}$ sec^{-1}, so folgt $\mu = 0{,}000\,018\,5$ mm^2. μ erscheint demnach als eine Fläche,

Digitized by Google

nämlich als eine Energie, dividiert durch die Einheit des Quadrates einer magnetischen Stromdichte und durch die Einheit des Volumens. Da der Wert $\varphi = 1$ Skalenteil sich schon als äufserst unwahrscheinlich herausstellte, so erscheint die in der Einleitung ausgesprochene Behauptung gerechtfertigt. Wären die bei der Berechnung der Versuche gemachten Annahmen mehr als rohe Annäherungen, so würde selbst die Überschreitung einer weit geringeren Grenze noch unwahrscheinlich sein.

Es ist von Interesse, zu bemerken, dafs wir elektrische Ströme kennen, welche zweifellos mit kinetischer Energie verbunden sind, deren Gröfse die aufgestellte Grenze beträchtlich überragt, die Ströme in Elektrolyten. Aus dem chemischen Äquivalent des Stromes von der magnetischen Intensität 1 und der Überführungszahl für salpetersaures Silberoxyd kann man leicht berechnen, mit welcher Geschwindigkeit sich in einer Lösung dieses Salzes von bestimmter Konzentration die Atomgruppen Ag und NO_3 bewegen, wenn in der Lösung die Stromdichte 1 herrscht. Daraus folgt dann die lebendige Kraft dieser Bewegung, und zwar findet man für mittlere Konzentrationen angenähert, wenn auf 1 Gewichtsteil Wasser n Gewichtsteile des Salzes kommen, $\mu = 0{,}0078/n\,\mathrm{mm}^2$. Liefse sich demnach der beschriebene Versuch mit einem Elektrolyten unter ähnlichen Bedingungen wie mit einem Metalle anstellen, so müfste er ein positives Resultat ergeben; thatsächlich bewirken Widerstand und Zersetzbarkeit der Elektrolyte, dafs sich gleich günstige Versuchsbedingungen auch nicht annähernd erreichen lassen.

Digitized by Google

5. Über die Berührung fester elastischer Körper.

Aus dem Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 92, S. 156—171, 1881.

In der Theorie der Elasticität werden als Ursachen der Deformationen teils Kräfte, welche auf das Innere der Körper wirken, teils auf die Oberfläche wirkende Druckkräfte angenommen. Für beide Arten von Kräften kann der Fall eintreten, dafs dieselben in einzelnen unendlich kleinen Teilen der Körper unendlich grofs werden, so zwar, dafs die Integrale der Kräfte, über diese Teile genommen, einen endlichen Wert behalten. Beschreiben wir alsdann um den Unstetigkeitspunkt eine geschlossene Fläche, deren Dimensionen sehr klein gegen die Dimensionen des ganzen Körpers sind, sehr grofs hingegen im Vergleich zu den Dimensionen des Teiles, in welchem die Kräfte angreifen, so können die Deformationen aufserhalb und innerhalb dieser Fläche ganz unabhängig von einander betrachtet werden. Aufserhalb hängen die Deformationen ab von der Gestalt des Gesamtkörpers, der Verteilung der übrigen Kräfte und den endlichen Integralen der Kraftkomponenten im Unstetigkeitspunkte; innerhalb hängen sie nur ab von der Verteilung der im Inneren selbst angreifenden Kräfte. Die Drucke und Deformationen im Inneren sind gegen die im Aufseren unendlich grofs.

Im Folgenden wollen wir einen hierher gehörigen Fall behandeln, der praktisches Interesse hat[1]), den Fall nämlich, dafs zwei elastische isotrope Körper sich in einem sehr kleinen Teile ihrer Oberfläche berühren, und durch diesen Teil einen

[1]) Vgl. Winkler, Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit, Prag 1867; I. S. 43. — Grashof, Theorie der Elasticität und Festigkeit. Berlin 1878; S. 49—54.

Digitized by Google

endlichen Druck der eine auf den anderen ausüben. Die sich berührenden Oberflächen stellen wir uns als vollkommen glatt vor, d. h. wir nehmen nur einen senkrechten Druck zwischen den sich berührenden Teilen an. Das beiden Körpern nach der Deformation gemeinsame Stück der Oberfläche wollen wir die Druckfläche, die Begrenzung dieses Stückes die Druckfigur nennen. Die Fragen, deren Beantwortung uns naturgemäfs zunächst obliegt, sind die nach der Fläche, von welcher die Druckfläche ein unendlich kleiner Teil ist[1]), die Frage nach der Form und absoluten Gröfse der Druckfigur, die Frage nach der Verteilung des senkrechten Druckes in der Druckfläche. Von Wichtigkeit ist die Bestimmung der Maximaldrucke, welche in den an einander gepreſsten Körpern vorkommen, insofern es von diesen abhängt, ob der Druck ohne bleibende Deformation ertragen wird; von Interesse ist endlich die Annäherung der beiden Körper, welche durch einen bestimmten Gesamtdruck hervorgerufen wird.

Als gegeben haben wir zu betrachten die beiden Elasticitätskonstanten eines jeden der sich berührenden Körper, die Form und gegenseitige Lage der Oberflächen in der Nähe des Berührungspunktes, endlich den Gesamtdruck. Unsere Mafse wollen wir so wählen, dafs die Druckfläche endlich erscheint, dann gelten unsere Betrachtungen für das ganze endliche Gebiet, die Gesamtdimensionen der sich berührenden Körper aber haben wir uns als unendlich vorzustellen.

Wir denken uns zunächst die beiden Oberflächen in mathematische Berührung gebracht, und zwar so, dafs die gemeinsame Normale parallel ist der Richtung des Druckes, welchen der eine Körper auf den anderen ausüben soll. In der gemeinsamen Tangentialebene richten wir das orthogonale geradlinige System der x, y ein, dessen Nullpunkt der Berührungspunkt sein soll, die dritte senkrechte Koordinate heifse z. Der Ab-

[1]) Im allgemeinen ändern sich die Krümmungsradien der Oberfläche eines deformierten Körpers nur unendlich wenig, in unserem speziellen Falle hingegen ändern sie sich um endliche Gröfsen, und hierin liegt die Berechtigung obiger Frage. Berühren sich z. B. zwei gleiche Kugeln von gleichem Material, so gehört die Druckfläche einer Ebene an, also einer Fläche, die von jeder der sich berührenden Oberflächen ihrer Natur nach verschieden ist.

Digitized by Google

stand jedes Punktes der beiden Oberflächen von der Tangentialebene in der Nähe des Berührungspunktes, d. h. im ganzen endlichen Gebiet, wird durch eine homogene Funktion zweiten Grades in x und y dargestellt sein. Es wird daher auch der Abstand zweier korrespondierender Punkte der beiden Oberflächen durch eine solche Funktion dargestellt sein, und zwar wollen wir das System der x und y so drehen, dafs aus der letztgenannten Funktion das Glied in xy wegfällt.

Wir können dann die Gleichungen der beiden Oberflächen schreiben:

$$z_1 = A_1x^2 + Cxy + B_1y^2, \qquad z_2 = A_2x^2 + Cxy + B_2y^2,$$

und wir haben für den Abstand korrespondierender Punkte beider Oberflächen $z_1 - z_2 = Ax^2 + By^2$, wo $A = A_1 - A_2$, $B = B_1 - B_2$ und alle A, B, C als verschwindend klein zu betrachten sind[1]). A und B haben nach der Bedeutung der Gröfse $z_1 - z_2$ das gleiche Vorzeichen; wir wollen dasselbe als positiv annehmen. Dies fällt zusammen mit der Bestimmung, dafs die positive zAxe in das Innere desjenigen Körpers gehe, auf welchen sich der Index 1 bezieht.

Wir denken uns weiter in jedem der beiden Körper ein besonderes mit dem betreffenden Körper im Unendlichen starr verbundenes rechtwinklig-geradliniges Koordinatensystem, welches während der mathematischen Berührung der Oberfläche mit dem entsprechenden Teile des bisherigen Systemes der xyz zusammenfällt. Bei einem auf die Körper ausgeübten Drucke werden sich diese Koordinatensysteme parallel der

[1]) Es seien ϱ_{11} und ϱ_{21} die beiden reziproken Hauptkrümmungsradien der Oberfläche des einen Körpers, positiv gerechnet, wenn die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte im Innern dieses Körpers liegen, ebenso seien ϱ_{21} und ϱ_{22} die beiden Hauptkrümmungen der Oberfläche des anderen Körpers, endlich sei ω der Winkel, welchen die Ebenen der Krümmungen ϱ_{21} und ϱ_{22} mit einander bilden. Dann ist

$$2(A+B) = \varrho_{11}+\varrho_{12}+\varrho_{21}+\varrho_{22},$$

$$2(A-B) = \sqrt{(\varrho_{11}-\varrho_{12})^2+2(\varrho_{11}-\varrho_{12})(\varrho_{21}-\varrho_{22})\cos 2\omega+(\varrho_{21}-\varrho_{22})^2}.$$

Führen wir einen Hilfswinkel τ ein durch die Gleichung $\cos\tau = (A-B):(A+B)$, so ist

$$2A = (\varrho_{11}+\varrho_{12}+\varrho_{21}+\varrho_{22})\cos^2\frac{\tau}{2}, \quad 2B = (\varrho_{11}+\varrho_{12}+\varrho_{21}+\varrho_{22})\sin^2\frac{\tau}{2}.$$

Digitized by Google

zAxe gegen einander verschieben und zwar wird ihre Verschiebung gleich sein der Annäherung der von der Druckstelle unendlich entfernten Teile beider Körper. Es wird nicht nötig sein, für diese Koordinatensysteme besondere Bezeichnungen einzuführen. Die Ebene $z = 0$ in jedem dieser Systeme ist der Oberfläche des betreffenden Körpers im Endlichen unendlich nahe und kann daher als die Oberfläche selbst angesehen werden, ebenso die Richtung der zAxe als die Richtung der Normale zu dieser Oberfläche.

Es seien ξ, η, ζ die Verschiebungen nach x, y, z; mit Y_x werde die Druckkomponente in Richtung der y bezeichnet, welche in einem Flächenelemente, dessen Normale die x-Richtung hat, von dem Körperteile, in dem x kleinere Werte besitzt, auf denjenigen, in dem x gröfser ist, ausgeübt wird, und die analoge Bezeichnung gelte für die übrigen Druckkomponenten; es seien endlich $K_1\,\theta_1$ und $K_2\,\theta_2$ die Elasticitätskoefficienten des einen und des anderen Körpers. Allgemein mögen die Gröfsen, welche sich auf den einen oder den anderen der beiden Körper beziehen, durch die Indices 1 und 2 unterschieden werden; wo die Rechnungen sich gleichmäfsig auf beide beziehen, lassen wir die Indices fort. Wir haben nun folgende Bedingungen für das Gleichgewicht:

1. Im Inneren jedes Körpers mufs sein

$$0 = \Delta\xi + (1+2\theta)\frac{\partial\sigma}{\partial x}, \quad 0 = \Delta\eta + (1+2\theta)\frac{\partial\sigma}{\partial y}, \quad 0 = \Delta\zeta + (1+2\theta)\frac{\partial\sigma}{\partial z},$$

$$\sigma = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z} \quad ,$$

und zwar ist in 1 für θ θ_1, in 2 für θ θ_2 zu setzen.

2. An den Grenzen müssen die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

a) Im Unendlichen verschwinden ξ, η, ζ, da hier unsere Koordinatensysteme mit den Körpern starr verbunden sind;

b) für $z = 0$, das heifst für die Oberflächen der Körper, müssen die Tangentialkräfte, die senkrecht zur zAxe sind, verschwinden, also:

$$Y_z = -K\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) = 0 \quad , \qquad X_z = -K\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right) = 0 \quad ;$$

Digitized by Google

c) für $z = 0$ muſs ferner auſserhalb eines gewissen Teiles dieser Ebene, nämlich auſserhalb der Druckfläche, auch die Normalkraft verschwinden, also sein

$$Z_z = 2K\left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \theta\sigma\right) = 0 \quad .$$

Innerhalb jenes Teiles muſs sein

$$Z_{z1} = Z_{z2} \quad .$$

Die Verteilung des Druckes in jenem Teile kennen wir nicht, dafür haben wir hier eine Bedingung für die Verschiebung ζ:

d) Bezeichnet nämlich α die Verschiebung gegen einander der beiden Koordinatensysteme, auf welche wir die Verrückungen beziehen, so ist der Abstand korrespondierender Punkte beider Oberflächen nach der Deformation gleich $Ax^2 + By^2 + \zeta_1 - \zeta_2 - \alpha$, und da innerhalb der Druckfläche dieser Abstand verschwinden soll, muſs obiger Ausdruck gleich Null sein, also sein:

$$\zeta_1 - \zeta_2 = \alpha - Ax^2 - By^2 = \alpha - z_1 + z_2 \quad .$$

e) Zu den aufgezählten Bedingungen treten dann noch die, daſs im Inneren der Druckfläche Z_z überall das positive Vorzeichen habe, sowie die, daſs auſserhalb der Druckfläche $\zeta_1 - \zeta_2 > \alpha - Ax^2 - By^2$ sei, da sonst der eine Körper in den anderen überquellen müſste.

f) Endlich muſs das Integral $\int Z_z\, ds$, genommen über den von der Druckfigur begrenzten Teil der Oberfläche gleich dem gegebenen Gesamtdruck, den wir p nennen wollen, sein.

Die besondere Form der Oberfläche ber beiden Körper kommt nur in der Grenzbestimmung 2 d) vor, abgesehen von dieser verhält sich jeder derselben wie ein unendlich groſser Körper, der den ganzen Raum auf einer Seite der Ebene $z = 0$ ausfüllt, während auf diese Ebene nur senkrechte Drucke wirken. Das Gleichgewicht eines solchen Körpers betrachten wir daher näher. Sei P eine Funktion, welche innerhalb des Körpers der Gleichung $\Delta P = 0$ genügt; im besonderen wollen wir uns P vorstellen als Potential einer auf der Ebene $z = 0$ im Endlichen verteilten Elektricitätsmenge. Sei ferner

Digitized by Google

$$\Pi = -\frac{zP}{K} + \frac{1}{K(1+2\theta)}\left\{\int_z^i P dz - J\right\} ,$$

wo i eine unendliche Gröfse sein soll und J eine Konstante, die so gewählt ist, dafs Π endlich wird. Zu diesem Behufe wird J gleich sein müssen dem natürlichen Logarithmus von i, multipliziert mit der Gesamtmenge freier Elektricität, die dem Potentiale P entspricht. Aus der Festsetzung für Π folgt:

$$\Delta\Pi = -\frac{2}{K}\frac{\partial P}{\partial z} .$$

Wir setzen nun, nach Einführung der Abkürzung

$$\frac{2(1+\theta)}{K(1+2\theta)} = \vartheta :$$

$$\xi = \frac{\partial \Pi}{\partial x} , \qquad \eta = \frac{\partial \Pi}{\partial y} , \qquad \zeta = \frac{\partial \Pi}{\partial z} + 2\vartheta P ,$$

$$\sigma = \Delta\Pi + 2\vartheta\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{2}{K(1+2\theta)}\frac{\partial P}{\partial z} .$$

Man überzeugt sich leicht, dafs das vorgelegte System von Verschiebungen den für ξ, η, ζ aufgestellten Differentialgleichungen genügt, und dafs in der Unendlichkeit diese Verschiebungen verschwinden. Für die Komponenten der Drucke erhalten wir:

$$X_x = -2K\left\{\frac{\partial^2\Pi}{\partial x^2} + \frac{2\theta}{K(1+2\theta)}\frac{\partial P}{\partial z}\right\} ,$$

$$Y_y = -2K\left\{\frac{\partial^2\Pi}{\partial y^2} + \frac{2\theta}{K(1+2\theta)}\frac{\partial P}{\partial z}\right\} ,$$

$$Z_z = -2K\left\{\frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2} + \frac{2(2+3\theta)}{K(1+2\theta)}\frac{\partial P}{\partial z}\right\} ,$$

$$X_y = -2K\frac{\partial^2\Pi}{\partial x\partial y} ,$$

$$X_z = -2K\left\{\frac{\partial^2\Pi}{\partial x\partial z} + \vartheta\frac{\partial P}{\partial x}\right\} = 2z\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial z} ,$$

$$Y_z = -2K\left\{\frac{\partial^2\Pi}{\partial y\partial z} + \vartheta\frac{\partial P}{\partial y}\right\} = 2z\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z} .$$

Digitized by Google

Aus den beiden letzten Formeln folgt, dafs für das vorgelegte System in der Ebene $z = 0$ die zur z Axe senkrechten Tangentialkräfte verschwinden. Wir bestimmen noch die Verschiebung ζ und den Normaldruck Z_z für die Ebene $z = 0$; wir finden

$$\zeta = \vartheta P \quad , \quad Z_z = -2\frac{\partial P}{\partial z} \quad .$$

Die Dichtigkeit der Elektricität, welche zum Potentiale P gehört, ist gleich $-(1/2\pi)(\partial P/\partial z)$, wir erhalten daher den Satz: Die Verschiebung ζ in der Oberfläche, welche dem Normaldruck Z_z entpricht, ist gleich dem $\vartheta/4\pi$fachen des Potentials, welches zu einer dem Druck Z_z numerisch gleichen elektrischen Dichtigkeit gehört.

Indem wir nun die Betrachtung der beiden Körper wieder aufnehmen, denken wir uns die Elektricität, deren Potential P ist, nur in einem begrenzten Teile der Ebene $z = 0$ verbreitet, setzen Π_1 und Π_2 den Ausdrücken gleich, die aus dem für Π gegebenen Ausdrucke entstehen, wenn den Zeichen K und θ der Index 1 oder 2 gegeben wird, und machen:

$$\xi_1 = \frac{\partial \Pi_1}{\partial x} \quad , \quad \eta_1 = \frac{\partial \Pi_1}{\partial y} \quad , \quad \zeta_1 = \frac{\partial \Pi_1}{\partial z} + 2\vartheta_1 P \quad ,$$

$$\xi_2 = -\frac{\partial \Pi_2}{\partial x} \quad , \quad \eta_2 = -\frac{\partial \Pi_2}{\partial y} \quad , \quad \zeta_2 = -\frac{\partial \Pi_2}{\partial z} - 2\vartheta_2 P \quad ,$$

woraus für $z = 0$ folgt:

$$\zeta_1 = \vartheta_1 P \quad , \quad \zeta_2 = \vartheta_2 P \quad , \quad Z_{z1} = -2\frac{\partial P}{\partial z} \quad , \quad Z_{z2} = 2\frac{\partial P}{\partial z} \quad .$$

Bei dieser Annahme wird den gemachten Auseinandersetzungen zufolge den Bedingungen 1, 2a) und 2b) genügt. Da $\partial P/\partial z$ auf beiden Seiten der Ebene $z = 0$ entgegengesetzte Werte hat und verschwindet aufserhalb der elektrischen Fläche, deren Potential P ist, so sind durch den gemachten Ansatz auch die Bedingungen 2c) erfüllt, falls die Druckfläche die mit Elektricität belegte Fläche ist. Daraus, dafs P an der Fläche $z=0$ stetig ist, folgt ferner für diesen Wert von z: $\vartheta_2\zeta_1 + \vartheta_1\zeta_2 = 0$. Nach der Bedingung 2d) aber haben wir für die Druckfläche: $\zeta_1 - \zeta_2 = \alpha - z_1 + z_2$, also wird hier:

Digitized by Google

$$\zeta_1 = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_1+\vartheta_2}(\alpha - z_1 + z_2) \quad , \quad \zeta_2 = -\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1+\vartheta_2}(\alpha - z_1 + z_2) \quad .$$

Die Gleichung der Druckfläche ist, wenn wir von einer Konstanten, die von der Wahl des Koordinatensystems abhängt und daher bedeutungslos ist, absehen, $z = z_1 + \zeta_1 = z_2 + \zeta_2$, also entwickelt $(\vartheta_1 + \vartheta_2) z = \vartheta_2 z_1 + \vartheta_1 z_2$. Hiernach ist die Druckfläche Teil einer Fläche zweiten Grades, die zwischen den sich berührenden Flächen in deren undeformiertem Zustande liegt, sie ist ähnlicher der Begrenzung desjenigen Körpers, dessen Elasticitätskoefficient gröfser ist; sind beide Körper von demselben Material, so ist sie geradezu die Mittelfläche zwischen deren Oberflächen, da dann $2z = z_1 + z_2$ wird.

Wir machen jetzt eine bestimmte Annahme über die Anordnung der Elektricität, deren Potential P ist. Sie sei verbreitet auf einer Ellipse, deren Halbaxen a und b in die Richtung der Axen der x und y fallen, mit einer Dichtigkeit, die gleich

$$\frac{3p}{8\pi^2 ab}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

ist, das heifst so, dafs sie aufgefafst werden kann als eine Masse, die mit gleicher räumlicher Dichtigkeit ein unendlich abgeplattetes Ellipsoid erfüllt. Es ist dann

$$P = \frac{3p}{16\pi}\int_u^\infty \frac{1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{\lambda}}{\sqrt{a^2+\lambda \,.\, b^2+\lambda \,.\, \lambda}}\, d\lambda \quad ,$$

wo die untere Integralgrenze u die positive Wurzel der kubischen Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{u} = 1$$

bezeichnet. Für das Innere der Druckfläche, welche durch die genannte Ellipse begrenzt wird, ist $u = 0$, also $P = L - Mx^2 - Ny^2$, wo L, M, N gewisse bestimmte positive Integrale bedeuten. Die Bedingung 2d) ist demnach erfüllt, wenn wir a und b so bestimmen, dafs

$$(\vartheta_1 + \vartheta_2) M = A \quad , \quad (\vartheta_1 + \vartheta_2) N = B$$

Digitized by Google

wird, was immer möglich ist. Die in der Bedingung vorkommende Unbekannte α bestimmt sich dann durch die Gleichung

$$(\vartheta_1 + \vartheta_2) L = \alpha \quad .$$

Dafs die erste der Bedingungen 2e) erfüllt ist, folgt unmittelbar aus der Gleichung

$$Z_z = \frac{3p}{2\pi ab} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad .$$

Um zu zeigen, dafs es auch die zweite ist, ist zu beweisen, dafs für $z = 0$ und $x^2/a^2 + y^2/b^2 > 1$, $(\vartheta_1 + \vartheta_2) P > \alpha - Ax^2 - By^2$ ist. Zu diesem Zwecke beachte man, dafs hier:

$$P = L - Mx^2 - Ny^2 - \frac{3p}{16\pi} \int_0^u \frac{1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda}}{\sqrt{a^2+\lambda \,.\, b^2+\lambda \,.\, \lambda}} d\lambda$$

und daher, da der Zähler des unter dem Integralzeichen stehenden Ausdrucks im betrachteten Gebiete negativ ist, $P > L - Mx^2 - Ny^2$. Durch Multiplikation dieser Gleichung mit $\vartheta_1 + \vartheta_2$ folgt die, welche wir zu beweisen suchten. Dafs endlich auch die letzte Bedingung 2f) erfüllt ist, ergiebt eine einfache Integration, und wir besitzen daher in der angenommenen Form von P und dem zugehörigen System der $\xi\, \eta\, \zeta$ eine allen Bedingungen genügende Lösung.

Die Gleichungen für die Axen der Druckellipse werden, explicite geschrieben:

$$\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)^3 (b^2+u) u}} = \frac{A}{\vartheta_1 + \vartheta_2} \frac{16\pi}{3p} \,,$$

$$\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(a^2+u) (b^2+u)^3 u}} = \frac{B}{\vartheta_1 + \vartheta_2} \frac{16\pi}{3p} \,,$$

oder, nach Einführung des Verhältnisses $a:b = k$ und einer einfachen Umformung:

Digitized by Google

$$\frac{1}{a^3}\int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1+k^2z^2)^3(1+z^2)}} = \frac{8\pi}{3p}\frac{A}{\vartheta_1+\vartheta_2},$$

$$\frac{1}{a^3}\int_0^\infty \frac{dz}{k^2\sqrt{(1+k^2z^2)(1+z^2)^3}} = \frac{8\pi}{3p}\frac{B}{\vartheta_1+\vartheta_2}.$$

Durch Division wird eine transcendente Gleichung für das Verhältnis k erhalten.[1]) Dasselbe hängt nur ab von dem Verhältnisse $A:B$, und man erkennt leicht aus der Bedeutung, welche wir den Kräften und Verschiebungen untergelegt haben, dafs die Druckellipse immer länglicher ist, als die Ellipsen, in welchen der Abstand der beiden Körper konstant ist. Für die absolute Gröfse der Druckfläche folgt, dafs dieselbe bei gegebener Form der Oberflächen portortional ist der dritten Wurzel aus dem Drucke, sowie der dritten Wurzel aus der Gröfse $\vartheta_1+\vartheta_2$. Für die Annäherung der Körper durch den Druck haben wir nach dem Vorigen:

---

[1]) Die Auflösung dieser Gleichung und die Auswertung der zur Bestimmung von a und b notwendigen Integrale kann mit Hilfe der LEGENDRE'schen Tafeln ausgeführt werden, ohne dafs neue Quadraturen nötig würden. Die immerhin weitläufige Rechnung wird für die meisten Fälle überflüssig gemacht durch die folgende kleine Tabelle, deren Einrichtung diese ist. Drückt man die Gröfsen A und B in den Gleichungen für a und b durch die Hauptkrümmungen und den in einer früheren Anmerkung eingeführten Hilfswinkel τ aus, so lassen sich die Auflösungen dieser Gleichungen in der Form darstellen:

$$a = \mu\sqrt[3]{\frac{3p(\vartheta_1+\vartheta_2)}{8(\varrho_{11}+\varrho_{12}+\varrho_{21}+\varrho_{22})}}, \qquad b = \nu\sqrt[3]{\frac{3p(\vartheta_1+\vartheta_2)}{8(\varrho_{11}+\varrho_{12}+\varrho_{21}+\varrho_{22})}},$$

wo μ und ν transcendente Funktionen des Winkels τ sind. Die Tabelle giebt nun die Werte dieser Funktionen für zehn Werte des in Winkelgraden angegebenen Argumentes τ.

τ	90	80	70	60	50	40	30	20	10	0
μ	1,0000	1,1278	1,2835	1,4858	1,7542	2,1357	2,7307	3,7779	6,6120	infinitum
ν	1,0000	0,8927	0,8017	0,7171	0,6407	0,5673	0,4930	0,4079	0,3186	0.0000

Digitized by Google

$$\alpha = \frac{3p}{8\pi}\,\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{a}\int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1+k^2z^2)(1+z^2)}} \quad .$$

Führen wir die Multiplikation mit der Summe $\vartheta_1+\vartheta_2$ aus, so zerfällt α in zwei Summanden, die eine besondere Bedeutung haben; es sind die Annäherungen des Nullpunktes an die unendlich entfernten Teile des einen und des anderen Körpers; wir können sie bezeichnen als die Einsenkungen, die der eine und der andere Körper erlitten hat. Bei gleicher Gestalt der sich berührenden Oberflächen ist die Annäherung proportional der $\frac{2}{3}$ten Potenz des Druckes und der gleichen Potenz der Gröfse $\vartheta_1+\vartheta_2$. Ändern A und B unter Beibehaltung ihres Verhältnisses ihren absoluten Wert, so ändern sich die Dimensionen der Druckfläche umgekehrt wie die dritten Wurzeln aus diesem Werte, die Annäherung direkt wie diese Wurzeln. Werden A und B unendlich, so wird auch die Annäherung unendlich; Körper, welche sich mit scharfen Spitzen berühren, dringen in einander ein.

Hieran anknüpfend wollen wir die Beanspruchung desjenigen Elementes bestimmen, welches sich im Anfangspunkte unseres Koordinatensystems befindet, indem wir die drei Ausdehnungen $\partial\xi/\partial x$, $\partial\eta/\partial y$, $\partial\zeta/\partial z$ suchen. Wir haben zunächst für den Nullpunkt:

$$\sigma = \frac{2}{K(1+2\theta)}\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{3p}{2K(1+2\theta)\pi}\frac{1}{ab} \quad ,$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial z} = \frac{1}{K(1+2\theta)}\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{3p}{4K(1+2\theta)\pi}\frac{1}{ab} \quad .$$

Weiter haben wir für die Ebene $z=0$:

$$\xi = -\frac{\partial\Pi}{\partial x} \quad , \qquad \eta = -\frac{\partial\Pi}{\partial y} \quad ,$$

$$\Pi = \frac{1}{K(1+2\theta)}\int_0^\infty P\,dz = \frac{1}{2K(1+2\theta)}\int_{-\infty}^{\infty} P\,dz \quad .$$

Man erkennt, dafs in der gedachten Ebene ξ und η proportional sind den Kräften, welche ein unendlicher elliptischer Cylinder

Digitized by Google

ausübt, der auf der Druckfläche steht und dessen Dichtigkeit nach innen zunimmt nach demselben Gesetze, nach welchem der Druck in der Druckfläche zunimmt. Im allgemeinen sind also ξ und η durch verwickelte Funktionen gegeben; für die Punkte, welche der Axe nahe liegen, lassen sie sich indessen leicht berechnen. Wir schneiden um die Axe einen sehr dünnen Cylinder heraus, dessen Mantelfläche der Mantelfläche des ganzen ähnlich ist; diesen Cylinder können wir als homogen betrachten, und da der äufsere Teil auf die Punkte im Innern keine Anziehung ausübt, so müssen die Komponenten der in Rede stehenden Kräfte, und also auch ξ und η für die verschiedenen Punkte gleich sein einer Konstanten, multipliziert mit respektive x/a und y/b. Daraus folgt

$$a\frac{\partial\xi}{\partial x} - b\frac{\partial\eta}{\partial y} = 0 \quad .$$

Andererseits haben wir

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} = \sigma - \frac{\partial\zeta}{\partial z} = -\frac{3p}{4K(1+2\theta)\pi}\frac{1}{ab} \quad .$$

Hieraus finden wir nun für die drei Gröfsen, die wir suchten,

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = -\frac{3p}{4K(1+2\theta)\pi}\frac{1}{a(a+b)} \quad ,$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial y} = -\frac{3p}{4K(1+2\theta)\pi}\frac{1}{b(a+b)} \quad ,$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial z} = -\frac{3p}{4K(1+2\theta)\pi}\frac{1}{ab} \quad .$$

Das negative Vorzeichen dieser drei Gröfsen zeigt an, dafs das in Frage stehende Element in allen drei Richtungen komprimiert wird. Die Kompressionen sind der dritten Wurzel aus dem Gesamtdrucke proportional. Aus ihnen sind leicht die Drucke im Anfangspunkte zu bestimmen. Diese Drucke sind die gröfsten, welche überhaupt in den gepreſsten Körpern vorkommen; man kann daher behaupten, dafs ein Überschreiten der Elasticitätsgrenze nicht eher statthaben wird, als bis diese Drucke von der Ordnung derjenigen werden, welche ein solches

Digitized by Google

Überschreiten veranlassen können. In plastischen Körpern, z. B. in den weichen Metallen, wird dies Überschreiten zunächst in einer seitlichen Ausweichung, verbunden mit dauernder Kompression bestehen, dasselbe wird daher auch nicht eine ins Unendliche wachsende Störung des Gleichgewichtes zur Folge haben, sondern die Druckfläche wird sich so lange über das berechnete Mafs hinaus vergrößern, bis der Druck auf die Flächeneinheit hinreichend klein geworden ist, um ertragen zu werden. Schwieriger ist es, die Erscheinung in spröden Körpern, wie hartem Stahl, Glas, Krystallen zu bestimmen, in welchen eine Überschreitung der Elasticitätsgrenze nur als Entstehung eines Risses oder Sprunges, also nur unter dem Einflusse von Zugkräften auftritt. Von dem oben betrachteten Elemente, als von einem allseitig komprimierten, kann ein solcher Sprung nicht ausgehen, und es ist bei unserer heutigen Kenntnis von der Festigkeit spröder Körper überhaupt nicht möglich, genau dasjenige Element zu bestimmen, in welchem die Bedingungen für das Zustandekommen eines Sprunges bei wachsendem Druck zuerst auftreten. Indessen zeigt eine eingehendere Diskussion so viel, dafs in Körpern, welche in ihrem elastischen Verhalten dem Glase oder harten Stahle ähnlich sind, bei weitem die stärksten Zugkräfte in der Oberfläche und zwar am Rande der Druckfigur auftreten. Es wird durch eine solche Diskussion wahrscheinlich, dafs der erste Sprung an den Enden der kleinen Axe der Druckellipse entsteht und senkrecht zu dieser Axe am Rande der Druckellipse entlang läuft.

Die gefundenen Formeln werden besonders einfach für den Fall, dafs beide sich berührenden Körper Kugeln sind. In diesem Falle gehört auch die Druckfläche einer Kugel an. Ist ϱ der reciproke Radius der letzteren und sind ϱ_1 und ϱ_2 die reciproken Radien der sich berührenden Kugeln, so besteht die Beziehung $(\vartheta_1+\vartheta_2)\varrho = \vartheta_2\varrho_1+\vartheta_1\varrho_2$, welche für Kugeln aus gleichem Material in die einfachere $2\varrho = \varrho_1+\varrho_2$ übergeht. Die Druckfigur ist ein Kreis, dessen Radius wir a nennen wollen. Setzen wir

$$x^2+y^2=r^2 \quad , \qquad \frac{r^2}{a^2+u}+\frac{z^2}{u}=1 \quad ,$$

Digitized by Google

so wird

$$P = \frac{3p}{16\pi} \int_u^\infty \frac{1 - \frac{r^2}{a^2+u} - \frac{z^2}{u}}{(a^2+u)\sqrt{u}} du \quad ,$$

welches Integral sich auch in geschlossener Form darstellen läfst.

Man findet nun leicht für den Radius des Druckkreises a und für die Annäherung α der Kugeln sowie für die Verschiebung ζ in der Fläche $z = 0$, innerhalb des Druckkreises:

$$a = \sqrt[3]{\frac{3p(\vartheta_1+\vartheta_2)}{16(\varrho_1+\varrho_2)}} \quad , \qquad \alpha = \frac{3p(\vartheta_1+\vartheta_2)}{16a} \quad ,$$

$$\zeta = \frac{3p}{32} \vartheta \frac{2a^2-r^2}{a^3} \quad .$$

Aufserhalb des Druckkreises wird ζ durch eine etwas verwickeltere, einen arctg enthaltende Funktion dargestellt. Sehr einfache Ausdrücke ergeben sich für ξ und η in der Fläche $z = 0$. Für die Verdichtung in der Fläche $z = 0$ findet man

$$\sigma = -\frac{3p}{2K(1+2\theta)\pi} \frac{\sqrt{a^2-r^2}}{a^3}$$

innerhalb des Druckkreises, aufserhalb desselben ist $\sigma = 0$. Für den Druck Z_z innerhalb des Druckkreises wird erhalten

$$Z_z = \frac{3p}{2\pi} \frac{\sqrt{a^2-r^2}}{a^3} \quad .$$

Im Mittelpunkte hat man

$$Z_z = \frac{3p}{2\pi a^2} \quad , \qquad X_x = Y_y = \frac{1+4\theta}{4(1+2\theta)} \frac{3p}{\pi a^2} \quad .$$

Die erlangten Formeln lassen sich ohne weiteres auf besondere Fälle anwenden. Für θ kann man in den meisten Körpern mit hinreichender Annäherung 1 setzen. K wird dann gleich $\frac{3}{8}$ des Elasticitätsmoduls, ϑ wird gleich $\frac{3}{2}\frac{2}{9}$ des reciproken Wertes des Elasticitätsmoduls; in allen Körpern liegt ϑ zwischen dem Dreifachen und dem Vierfachen dieses reciproken Wertes. Prefst man beispielshalber eine Glaslinse von 100 Meter Radius durch das Gewicht eines Kilogrammes gegen

Digitized by Google

eine ebene Glasplatte (unter welchen Umständen der Radius des ersten NEWTON'schen Ringes gleich ca. 5,2 Millimetern wird), so erhält man eine Druckfläche, die einer Kugel von 200 Meter Radius angehört, der Radius des Druckkreises ist 2,67 mm, die Annäherung der beiden Glaskörper beträgt nur 71 Milliontel Millimeter, der Druck Z_z in der Mitte der Druckfläche ist gleich 0,0669 Kilogramm pro Quadratmillimeter, die dazu senkrechten Drucke X_x und Y_y betragen ca. $\frac{5}{6}$ obigen Wertes. Denken wir uns als zweites Beispiel eine Reihe von Stahlkugeln vom Radius R durch ihre eigene Schwere gegen eine horizontale starre Platte gepreſst, so findet man sehr nahezu, in Millimetern gerechnet, den Radius des Druckkreises $a = {}_{\text{T}}{}^{1}{}_{0\,0\,0}\, R^{\frac{4}{3}}$; also für eine Kugel vom Radius

	1 mm,	1 m,	1 km,	1000 km,
wird	$a =$ ca. ${}_{\text{T}}{}^{1}{}_{0\,0\,0}$ mm,	10 mm,	100 m,	1000 km,
oder	$a =$	${}_{\text{T}}{}^{1}{}_{0\,0\,0}$,	${}_{\text{T}}{}^{1}{}_{0\,0}$,	${}_{\text{T}}{}^{1}{}_{0}$, $\quad \frac{1}{\text{T}}$

des Radius. Bei Kugeln, deren Radius grösser als 1 km ist, beträgt der Radius des Druckkreises schon mehr als ${}_{\text{T}}{}^{1}{}_{0}$ des Radius der Kugel. Auf solche Verhältnisse finden unsere Rechnungen keine Anwendung, da wir eben dies Verhältnis als einen kleinen Bruch voraussetzten. Aber eben daſs in Kugeln von dieser Gröſse bei kleinen Deformationen ein Gleichgewicht nicht mehr möglich ist, zeigt, daſs ein solches überhaupt nicht zu stande kommen kann. Denken wir uns als ein anderes Beispiel zwei Stahlkugeln von gleichem Radius R aneinander gelegt und nur durch die gegenseitige Gravitation aneinander gepreſst. Es ergiebt sich hier der Radius des Druckkreises $\varrho = 0{,}000000378\, R^{\frac{5}{3}}$, wenn in Millimetern gerechnet wird.[1]) Ist der Radius der beiden Kugeln gleich 4,3 Kilometern, so wird $\varrho = {}_{\text{T}}{}^{1}{}_{0\,0}\, R$, ist er gleich 136 Kilometern, so wird $\varrho = {}_{\text{T}}{}^{1}{}_{0}\, R$. Zwischen beiden Werten und näher dem letzteren wird derjenige Wert von R liegen, für welchen

[1]) In diesen Rechnungen ist der Elasticitätsmodul des Stahles zu 20000 kg/mm², die Dichtigkeit des Stahls zu 7,7, die mittlere der Erde zu 6 angenommen.

Digitized by Google

die Elasticitätskräfte aufhören, der Gravitation das Gleichgewicht zu halten. Werden Stahlkugeln von gröfserem Radius aneinander gelegt, so werden sie zerbrechen, und zwar in Teile, deren Dimensionen von der Ordnung der eben für R angegebenen Werte sind.

Zum Schlufs wollen wir von den erlangten Formeln eine Anwendung machen auf den Stofs elastischer Körper. Sowohl aus schon vorhandenen Beobachtungen, als auch aus den Resultaten der gleich anzustellenden Betrachtungen folgt, dafs die Stofszeit, d. h. die Zeit, während welcher die stofsenden Körper in Berührung sind, wenn auch absolut sehr klein, doch sehr grofs ist im Verhältnis zu derjenigen Zeit, welche elastische Wellen nötig haben, um in den in Rede stehenden Körpern Längen von der Ordnung desjenigen Teils der Oberflächen zu durchlaufen, welcher beiden Körpern in ihrer gröfsten Annäherung gemeinsam ist, und welchen wir die Stofsfläche nennen wollen. Daraus folgt, dafs der elastische Zustand beider Körper in der Nähe des Stofspunktes während des ganzen Verlaufs des Stofses sehr nahezu gleich ist dem Gleichgewichtszustande, den der zwischen beiden Körpern in jedem Augenblicke vorhandene Gesamtdruck bei längerer Dauer hervorbringen würde. Bestimmen wir daher den zwischen beiden Körpern herrschenden Druck aus der Beziehung, welche wir zwischen diesem Drucke und der Annäherung in Richtung der gemeinsamen Normale früher für ruhende Körper aufgestellt haben, und wenden im übrigen auf das Innere jedes der beiden Körper die Differentialgleichungen für bewegte elastische Körper an, so werden wir den Verlauf des Vorganges mit grofser Annäherung erhalten. Zu allgemeinen Sätzen können wir auf diese Weise naturgemäfs nicht kommen, wir erhalten aber eine Reihe solcher, wenn wir jetzt die weitere Voraussetzung machen, dafs die Stofszeit grofs sei auch gegen diejenige Zeit, welche die elastischen Wellen nötig haben, um die ganzen Dimensionen der stofsenden Körper zu durchlaufen. Ist diese Bedingung erfüllt, so bewegen sich alle Teile der stofsenden Körper, mit Ausnahme derjenigen, welche dem Stofspunkte unendlich nahe liegen, wie die Teile starrer Körper; dass die fragliche Bedingung in wirklichen Körpern erfüllt sein kann, werden wir aus unseren Resultaten nachweisen.

Digitized by Google

Wir behalten unsere Koordinatensysteme der xyz bei. Sei α die Komponente in Richtung der z der Entfernung zweier Punkte des einen und des anderen Körpers, zweier Punkte, die so gewählt sind, dafs ihre Entfernung von der Stofsfläche klein ist gegen die Dimensionen der ganzen Körper, grofs gegen die Dimensionen der Stofsfläche; sei ferner α' die Ableitung von α nach der Zeit. Ist nun dJ diejenige Bewegungsgröfse, welche während des Zeitelementes dt der eine Körper verliert, der andere gewinnt, so ist, wie die Theorie des Stofses starrer Körper zeigt: $d\alpha' = -k_1 dJ$, wo k_1 eine Gröfse ist, die nur von den Massen der stofsenden Körper, ihren Hauptträgheitsmomenten und der Lage der Hauptträgheitsaxen zur Stofsnormale abhängt.[1]) Andererseits ist dJ gleich dem Zeitelemente dt, multipliziert mit dem während desselben zwischen den Körpern thätigen Drucke. Dieser ist aber gleich $k_2 \alpha^{\frac{3}{2}}$, wo k_2 eine aus dem Vorigen zu bestimmende Konstante ist, die nur von der Form der Oberflächen und den Elasticitätsverhältnissen in unmittelbarer Nähe des Stofspunktes abhängt. Sonach ist $dJ = k_2 \alpha^{\frac{3}{2}} dt$ und $d\alpha' = -k_1 k_2 \alpha^{\frac{3}{2}} dt$, oder wenn wir integrieren, und mit α'_0 den Wert von α' unmittelbar vor dem Stofse bezeichnen:

$$\alpha'^2 - \alpha'^2_0 + \tfrac{4}{5} k_1 k_2 \alpha^{\frac{5}{2}} = 0 ,$$

welche Gleichung nichts anderes ist, als die der Erhaltung der Energie. Für die gröfste Annäherung der Körper ist $\alpha' = 0$; setzen wir den entsprechenden Wert von α gleich α_m, so ist $\alpha_m = (5\alpha'^2_0 / 4k_1 k_2)^{\frac{2}{5}}$, der zwischen den Körpern gleichzeitig auftretende Maximaldruck ist $p_m = k_2 \alpha_m^{\frac{3}{2}}$; daraus ergeben sich ohne weiteres die Dimensionen der Stofsfläche.

Um die Abhängigkeit des Vorganges von der Zeit zu gewinnen, integrieren wir nochmals und erhalten

---

[1]) Siehe Poisson, Traité de mécanique, II, Chap. 7. In der dort benutzten Bezeichnungsweise ist die Konstante k_1

$$k_1 = \frac{1}{M} + \frac{(b\cos\gamma - c\cos\beta)^2}{A} + \frac{(c\cos\alpha - a\cos\gamma)^2}{B} + \frac{(a\cos\beta - b\cos\alpha)^2}{C}$$
$$+ \frac{1}{M'} + \frac{(b'\cos\gamma' - c'\cos\beta')^2}{A'} + \frac{(c'\cos\alpha' - a'\cos\gamma')^2}{B'} + \frac{(a'\cos\beta' - b'\cos\alpha')^2}{C'}$$

Digitized by Google

$$t = \int_{\alpha}^{\alpha_m} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0'^2 - \frac{4}{5} k_1 k_2 \alpha^{\frac{5}{2}}}} .$$

Die obere Grenze ist so gewählt, dafs $t = 0$ wird für den Augenblick der gröfsten Annäherung. Für jeden Wert der unteren Grenze α erhält man durch das doppelte Vorzeichen der Wurzel zwei gleiche positive und negative Werte von t. Es ist sonach α eine gerade, α' eine ungerade Funktion von t; unmittelbar nach dem Stofse entfernen sich die Stofspunkte in Richtung der Normalen mit derselben relativen Geschwindigkeit, mit welcher sie sich vor dem Stofse einander näherten. Nach derselben transcendenten Funktion, nach welcher α' von seinem Anfangs- auf seinen Endwert übergeht, gehen alle übrigen Geschwindigkeitskomponenten von ihren Anfangswerten auf ihre Endwerte über.

Die beiden Körper berühren sich zunächst für $\alpha = 0$, sie verlassen sich, wenn α wieder gleich 0 ist; sonach ist die Dauer der Berührung oder die Stofszeit

$$T = 2 \int_{0}^{\alpha_m} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0'^2 - \frac{4}{5} k_1 k_2 \alpha^{\frac{5}{2}}}} = 2\eta \sqrt[5]{\frac{25}{16 \alpha_0' k_1^2 k_2^2}} = 2\eta \frac{\alpha_m}{\alpha_0'} ,$$

wenn

$$\eta = \int_{0}^{1} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^{\frac{5}{2}}}} = 1{,}4716$$

ist. Die Stofszeit kann demnach auf verschiedene Weise unendlich werden, ohne dafs diejenige Zeit, mit welcher verglichen sie grofs sein soll, gleichfalls unendlich würde. Insbesondere wird die Stofszeit unendlich, wenn die anfängliche relative Geschwindigkeit der stofsenden Körper unendlich klein ist; welches also auch im übrigen die Verhältnisse eines gegebenen Stofses sind, für hinreichend klein gewählte Geschwindigkeiten werden die gegebenen Entwickelungen jede gewünschte Genauigkeit besitzen. Allemal wird diese Genauigkeit gleich sein derjenigen, welche den sogenannten Gesetzen des Stofses vollkommen elastischer Körper für den gegebenen Fall innewohnt. Für den zentralen Stofs zweier Kugeln von gleichem Radius R

Digitized by Google

und gleichem Material von der Dichte q werden die Konstanten k_1 und k_2:

$$k_1 = \frac{3}{2R^3\pi q} , \qquad k_2 = \frac{8}{3\vartheta}\sqrt{\frac{R}{2}} ,$$

speziell für den Stofs zweier gleichen Stahlkugeln vom Radius R wird daher, wenn als Einheit der Länge das Millimeter und als Einheit der Kraft das Gewicht eines Kilogramms benutzt wird:

$$\log k_1 = 8{,}78 - 3\log R ,$$
$$\log k_2 = 4{,}03 + \tfrac{1}{2}\log R .$$

Daraus ergiebt sich dann für zwei solcher Kugeln, die mit einer relativen Geschwindigkeit v zusammenstofsen:

der Radius der Stofsfläche . . .	$a_m = 0{,}0020\, R v^{\frac{2}{5}}$ mm ,
die Stofszeit	$T = 0{,}000024\, R v^{-\frac{1}{5}}$ sec,
der Gesamtdruck im Augenblicke der gröfsten Annäherung	$p_m = 0{,}00025\, R^2 v^{\frac{6}{5}}$ kg ,
der gleichzeitig im Stofsmittelpunkte herrschende Maximaldruck pro Flächeneinheit	$p'_m = 29{,}1\, v^{\frac{2}{5}}$ kg/mm² .

Beträgt beispielsweise der Radius der Kugeln 25 mm, die Geschwindigkeit 10 mm/sec, so wird $a_m = 0{,}13$ mm, $T = 0{,}00038$ sec, $p_m = 2{,}47$ kg, $p'_m = 73{,}0$ kg/mm². Für zwei Stahlkugeln von der Gröfse der Erde, die mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 10 mm/sec zusammenträfen, würde die Dauer der Berührung nahe an 27 Stunden betragen.

Digitized by Google

6. Über die Berührung fester elastischer Körper und über die Härte.

Aus den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleifses, Berlin, November 1882.

Werden zwei elastische Körper gegen einander gepreſst, so berühren sie sich nicht in einem mathematischen Punkte, sondern in einem kleinen, aber endlichen Teile ihrer Oberflächen, welchen Teil wir die Druckfläche nennen wollen. Die Gestalt und Gröfse dieser Fläche und die Verteilung der Spannungen in der Nähe derselben sind mehrfach in Betracht gezogen worden (WINKLER, Lehre von der Elasticität und Festigkeit, Prag 1867, I, S. 43; GRASHOF, Theorie der Elasticität und Festigkeit, Berlin 1878, S. 49—54), die bisherigen Bestimmungen aber sind teils angenäherte, teils sogar behaftet mit nicht bekannten Erfahrungskoefficienten. Indessen ist das Problem auch einer exakten Lösung fähig, und ich habe die bezüglichen Rechnungen im 92. Bande des Journals für reine und angewandte Mathematik, S. 156, mitgeteilt.[1]) Da der Gegenstand in einigen Punkten ein wesentlich technisches Interesse hat, erlaube ich mir, denselben hier etwas vollständiger mit einem die Härte betreffenden Zusatze zu behandeln, den Beweis für die Richtigkeit der die Grundlage bildenden Formeln will ich zunächst kurz reproduzieren.

Wir denken uns die beiden Körper zunächst in mathematische Berührung gebracht, die gemeinsame Normale fällt dann zusammen mit der Richtung des Druckes, welchen der eine Körper auf den anderen ausübt. In der gemeinsamen Tangentialebene denken wir uns das rechtwinklig geradlinige Koordinatensystem der xy eingetragen, dessen Nullpunkt mit

[1]) [Siehe No. 5, S. 155.]

Digitized by Google

dem Berührungspunkte zusammenfalle, die dritte dazu senkrechte Koordinate sei z. Wir können unsere Aufmerksamkeit beschränken auf denjenigen Teil der Körper, welcher dem Berührungspunkte sehr nahe liegt, da hier die Spannungen aufserordentlich grofs sind gegen die im übrigen auftretenden, und daher auch nur zum kleinsten Teile abhängen von den in den übrigen Teilen der Körper angreifenden Kräften. Es genügt daher, die Gestalt der Oberflächen in unmittelbarer Nähe des Berührungspunktes zu kennen. In erster Annäherung, sobald wir nämlich unser Augenmerk nur auf jeden der Körper für sich richten, können wir sogar die Oberfläche derselben mit der gemeinsamen Tangentialebene $z = 0$, und die Richtung der Normalen mit der z-Richtung zusammenfallen lassen; in zweiter, sobald es nämlich auf den Zwischenraum der beiden Körper ankommt, reicht es aus, in der Entwickelung der Flächengleichungen die quadratischen Glieder in x und y beizubehalten. Der Abstand gegenüberliegender Punkte der beiden Oberflächen wird dann ebenfalls eine homogene Funktion zweiten Grades der zu den Punkten gehörigen xy sein, wir können unser System der xy so drehen, dafs aus dieser Funktion das Produkt in xy herausfällt, nach Vornahme dieser Operation sei der Abstand der Oberflächen gegeben durch die Gleichung $e = Ax^2 + By^2$. A und B müssen notwendig dasselbe Zeichen haben, da e nicht durch Null hindurchgehen kann; ziehen wir die Kurven, für welche e den gleichen Wert hat, so erhalten wir ein System ähnlicher Ellipsen, deren Mittelpunkt der Nullpunkt ist. Unsere Aufgabe besteht nun darin, eine solche Form für die Druckfläche und ein solches System von Verschiebungen und Spannungen in ihrer Nähe anzugeben, dafs: 1. diese Verschiebungen und Spannungen den für das Gleichgewicht elastischer Körper geltenden Differentialgleichungen genügen, und dafs die Spannungen in grofser Entfernung von der Druckfläche verschwinden; dafs 2. in den beiden Oberflächen die Tangentialkomponenten der Drucke überall verschwinden; dafs 3. in der Oberfläche auch der Normaldruck aufserhalb der Druckfläche verschwinde, innerhalb derselben aber Druck und Gegendruck gleich seien, und zwar mufs das Integral dieses Druckes, genommen über die ganze Druckfläche, gleich sein dem vorher festzusetzenden Gesamtdrucke p;

Digitized by Google

dafs endlich 4. der infolge der Verschiebungen geänderte Abstand der Oberflächen Null werde in der Druckfläche, und gröfser als Null bleibe aufserhalb derselben. Um die letzte Bedingung genauer zu formulieren, seien ξ_1, η_1, ζ_1 die Verschiebungen in Richtung der xyz in dem einen Körper, ξ_2, η_2, ζ_2 dieselben für den anderen; in jedem seien sie berechnet in Bezug auf die von der Druckstelle entfernten, undeformierten Teile der Körper, α bedeute die durch den Druck veranlafste Annäherung dieser Teile. Es haben sich dann zwei beliebige Punkte der beiden Körper, die gleiche Koordinaten x, y besitzen, durch den Druck genähert um die Gröfse $\alpha - \zeta_1 + \zeta_2$, diese Annäherung mufs innerhalb der Druckfläche den vorher vorhandenen Abstand $Ax^2 + By^2$ aufheben, also mufs hier sein $\zeta_1 - \zeta_2 = \alpha - Ax^2 - By^2$, während im übrigen in den Oberflächen $\zeta_1 - \zeta_2 > \alpha - Ax^2 - By^2$ sein mufs. Diese sämtlichen Bedingungen lassen sich nur durch ein einziges System von Verschiebungen befriedigen, ich will dieses System angeben und nachweisen, dafs dasselbe allen Anforderungen genügt.

Als Druckfläche nehmen wir eine Ellipse, deren Axen zusammenfallen sollen mit denen der Ellipsen $e = \text{constans}$, deren Gestalt aber länglicher als die jener ist. Die Gröfsen der Halbaxen a und b derselben behalten wir uns vor später zu bestimmen. Wir definieren zunächst eine Funktion P durch die Gleichung:

$$P = \frac{3p}{16\pi} \int_u^\infty \frac{1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{\lambda}}{\sqrt{a^2+\lambda \,.\, b^2+\lambda \,.\, \lambda}} d\lambda \quad ,$$

worin die untere Integralgrenze u die positive Wurzel der kubischen Gleichung

$$0 = 1 - \frac{x^2}{a^2+u} - \frac{y^2}{b^2+u} - \frac{z^2}{u}$$

sein soll. Die Gröfse u ist dann eine elliptische Koordinate des Punktes xyz, sie ist konstant in gewissen Ellipsoiden, die mit der Druckellipse gleiche Brennpunkte haben, und ist Null in allen Punkten, die der Druckfläche unendlich nahe liegen. Die Funktion P hat eine einfache Bedeutung in der Potentialtheorie, sie ist das Potential eines unendlich abgeplatteten,

Digitized by Google

gravitierenden Ellipsoides, welches die Druckfläche ausfüllen würde; in derselben Theorie wird bewiesen, dafs es der Differentialgleichung

$$\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0$$

genügt. Aus diesem P leiten wir nun zwei Funktionen Π ab, deren eine sich auf den einen, die andere sich auf den anderen Körper bezieht, und zwar soll sein:

$$\Pi_1 = -\frac{1}{K_1}\left(zP - \frac{1}{1+2\Theta_1}\int_z^\infty P dz\right) ,$$

$$\Pi_2 = -\frac{1}{K_2}\left(zP - \frac{1}{1+2\Theta_2}\int_z^\infty P dz\right) .$$

Hierin sollen K und Θ die Elasticitätskoefficienten der Körper bedeuten in der KIRCHHOFF'schen Bezeichnungsweise. Der gewöhnliche Elasticitätsmodul E ist durch diese Koefficienten ausgedrückt:

$$E = 2K\frac{1+3\Theta}{1+2\Theta} ,$$

das Verhältnis der Querkontraktion zur Längsdehnung ist

$$\mu = \frac{\Theta}{1+2\Theta} .$$

Für die Körper, welche dem Glase oder Stahle ähnlich sind, ist dies Verhältnis nahezu $\frac{1}{3}$, daher Θ nahe gleich 1, und K nahe gleich $\frac{3}{5}E$, für wenig kompressible Körper ist es nahe an $\frac{1}{2}$, alro hier $\Theta = \infty$, $K = \frac{1}{3}E$. In unseren Formeln wird übrigens eine besondere Kombination von K und Θ die Hauptrolle spielen, für welche wir deshalb eine besondere Bezeichnung einführen. Wir setzen

$$\vartheta = \frac{2(1+\Theta)}{K(1+2\Theta)} .$$

In Körpern, die dem Glase ähnlich sind, ist also $\vartheta = 4/3K = 32/9E$, in allen Körpern liegt ϑ zwischen $3/E$ und $4/E$, da

Digitized by Google

Θ zwischen 0 und ∞ liegt. In Bezug auf die Π ist zu bemerken, dafs dieselben, nach obigen Formeln berechnet, unendliche Werte annehmen, aber ihre Differentialquotienten, und nur auf diese kommt es uns an, sind endlich. Wir hätten nur nötig, den Π unendliche Konstanten von passender Gröfse hinzuzufügen, um ihnen selbst endliche Werte zu verleihen. Durch einfache Differentiation, unter Berücksichtigung, dafs $\Delta P = 0$, findet man:

$$\Delta\Pi_1 = -\frac{2}{K_1}\frac{\partial P}{\partial z} \quad , \quad \Delta\Pi_2 = -\frac{2}{K_2}\frac{\partial P}{\partial z} \quad .$$

Wir nehmen nun für die Verschiebungen in den beiden Körpern folgende Formen an:

$$\xi_1 = \frac{\partial \Pi_1}{\partial x} \quad , \quad \eta_1 = \frac{\partial \Pi_1}{\partial y} \quad , \quad \zeta_1 = \frac{\partial \Pi_1}{\partial z} + 2\vartheta_1 P \quad ,$$

$$\xi_2 = -\frac{\partial \Pi_2}{\partial x} \quad , \quad \eta_2 = -\frac{\partial \Pi_2}{\partial y} \quad , \quad \zeta_2 = -\frac{\partial \Pi_2}{\partial z} - 2\vartheta_2 P \quad ,$$

aus welchen folgt:

$$\sigma_1 = \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \eta_1}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial z} = \Delta\Pi_1 + 2\vartheta_1 \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{2}{K_1(1+2\Theta_1)}\frac{\partial P}{\partial z} \quad ;$$

$$\sigma_2 = -\frac{2}{K_2(1+2\Theta_2)}\frac{\partial P}{\partial z} \quad .$$

Dies System genügt zunächst den Differentialgleichungen für das Gleichgewicht, denn man hat:

$$\Delta\xi_1 + (1+2\Theta_1)\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} = \frac{\partial \Delta\Pi_1}{\partial x_1} + \frac{2}{K_1}\frac{\partial^2 P}{\partial z \partial x} = 0 \quad ,$$

und entsprechende Gleichungen gelten für $\xi_2\ \eta_1\ \eta_2$; und auch für die ζ findet man dasselbe Resultat, wenn man berücksichtigt, dafs $\Delta P = 0$ ist. Für die tangentialen Komponenten des Druckes auf die Oberfläche ($z = 0$) finden wir, wenn wir die Indices fortlassen:

$$X_z = -K\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) = -K\left(2\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z} - 2\vartheta\frac{\partial P}{\partial x}\right) = 2z\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} = 0$$

$$Y_z = -K\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) = -K\left(2\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z} - 2\vartheta\frac{\partial P}{\partial y}\right) = 2z\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} = 0 \quad ,$$

wie es die zweite Bedingung fordert.

Digitized by Google

Etwas mehr Mühe macht der Nachweis, dafs der dritten Forderung genügt ist. Wir lassen wieder die Indices fort, da die Rechnung sich gleichmäfsig auf beide Körper bezieht. Zunächst ist überhaupt:

$$Z_z = -2K\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z} + \Theta\sigma\right) = -2K\left\{\frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2} + \frac{2(2+3\Theta)}{K(1+2\Theta)}\frac{\partial P}{\partial z}\right\}$$

$$= 2z\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - 2\frac{\partial P}{\partial z} \quad ,$$

also in der Oberfläche $Z_z = -2\partial P/\partial z$. Nun erhält man unter Berücksichtigung der Gleichung für u allgemein:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{3p}{8\pi} z \int_u^\infty \frac{d\lambda}{\lambda\sqrt{a^2+\lambda.b^2+\lambda.\lambda}} \quad ,$$

und es wird also in der Oberfläche, wie es sein mufs, $\partial P/\partial z$ und also auch Z_z gleich Null, wenigstens aufserhalb der Druckfläche. In der Druckfläche, wo $u = 0$, nimmt der Ausdruck die Form $0.\infty$ an. Das gewöhnliche Verfahren zur Festsetzung des wahren Wertes einer solchen Form ergiebt:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{3p}{8\pi ab}\frac{z^2\frac{du}{dz}}{u\sqrt{u}} \text{, also, da für } u = 0 : z^2 = u\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) \text{ ist,}$$

$$Z_z = -2\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{3p}{2\pi ab}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad .$$

Hierin kommt keine Gröfse mehr vor, die einen Index tragen könnte, es ist also in der Druckfläche Z_z dasselbe für beide Körper, es ist also hier Druck und Gegendruck gleich. Endlich ist das Integral von Z_z über die Druckfläche gleich dem $3p/4\pi ab$fachen Inhalt eines Ellipsoides mit den Axenlängen 1, a, b, also gleich p, und es erhält also der Gesamtdruck in der That den Wert, welchen wir forderten.

Es bleibt noch übrig zu zeigen, dafs auch der vierten Bedingung durch passende Bestimmung der Halbaxen a und b genügt wird. Zu dem Ende bemerken wir, dafs man hat:

$$\zeta_1 = \frac{\partial\Pi_1}{\partial z} + 2\vartheta_1 P = -\frac{z}{K_1}\frac{\partial P}{\partial z} + \vartheta_1 P \quad ,$$

Digitized by Google

dafs also für die Oberflächen wird $\zeta_1 = \vartheta_1 P$ und $\zeta_2 = \vartheta_2 P$. Da nun innerhalb der Druckfläche die untere Integralgrenze u konstant, nämlich $u = 0$ ist, so nimmt innerhalb derselben P die Form $P = L - Mx^2 - Ny^2$ an, und es ist daher nur nötig, a, b und α so zu bestimmen, dafs $(\vartheta_1 + \vartheta_2)M = A$, $(\vartheta_1 + \vartheta_2)N = B$, $(\vartheta_1 + \vartheta_2)L = \alpha$ wird, um der Gleichung $\zeta_1 - \zeta_2 = \alpha - Ax^2 - By^2$ zu genügen; diese Bestimmung aber ist immer möglich. Die Gleichungen für a und b lauten explicite geschrieben:

I)
$$\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)^3(b^2+u)u}} = \frac{A}{\vartheta_1+\vartheta_2}\frac{16\pi}{3p},$$
$$\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)^3 u}} = \frac{B}{\vartheta_1+\vartheta_2}\frac{16\pi}{3p}.$$

Es läfst sich schliefslich leicht zeigen, dafs auch die keineswegs unwesentliche, aufserhalb der Druckfläche geforderte Ungleichheit erfüllt ist; da der Nachweis die Wiederholung komplizierter Integrale erfordert, übergehe ich denselben.

Unsere Formeln bilden also die richtige Lösung des gestellten Problems und wir können uns ihrer bedienen, um die hauptsächlichsten, in Bezug auf den Gegenstand zu stellenden Fragen zu beantworten. Zunächst ist nötig, die Bestimmung der Gröfsen a und b weiterzuführen, denn die bisher für dieselben gefundenen Gleichungen sind nicht ohne weiteres aufzulösen, und es sind im allgemeinen nicht einmal die Gröfsen A und B explicite bekannt. Ich nehme an, es seien uns gegeben die vier Hauptkrümmungen (reciproken Hauptkrümmungsradien) der beiden Oberflächen, sowie die gegenseitige Lage der Ebenen derselben; seien die ersteren ϱ_{11} und ϱ_{12} für den einen, ϱ_{21} und ϱ_{22} für den anderen Körper und es sei ω der Winkel, welchen die Ebene von ϱ_{11} mit derjenigen von ϱ_{21} bildet. Die ϱ seien positiv gerechnet, wenn die zugehörigen Mittelpunkte im Inneren des betreffenden Körpers liegen. Unser System der xy liege so, dafs die xz Ebene mit der Ebene von ϱ_{11} den einstweilen unbekannten Winkel ω' bildet. Dann sind die Gleichungen der Oberflächen diese:

Digitized by Google

$$2z_1 = \varrho_{11}(x\cos\omega' + y\sin\omega')^2 + \varrho_{12}(y\cos\omega' - x\sin\omega')^2$$

$$2z_2 = -\varrho_{21}(x\cos[\omega' - \omega] + y\sin[\omega' - \omega])^2$$
$$-\varrho_{22}(y\cos[\omega' - \omega] - x\sin[\omega' - \omega])^2 \quad .$$

Die Differenz $z_1 - z_2$ giebt den Abstand der Oberflächen, setzen wir dieselbe $= Ax^2 + By^2$ und nun rechts und links die Koefficienten von x^2, xy, y^2 gleich, so erhalten wir 3 Gleichungen für ω', A und B; die Auflösung derselben ergiebt für den Winkel ω', der offenbar die Lage der Axen der Druckellipse zu den Flächen bestimmt:

$$\operatorname{tg} 2\omega' = \frac{\sin 2\omega\,(\varrho_{21} - \varrho_{22})}{\varrho_{11} - \varrho_{12} + (\varrho_{21} - \varrho_{22})\cos 2\omega}, \text{ und für } A \text{ und } B$$

$$2(A+B) = \varrho_{11} + \varrho_{12} + \varrho_{21} + \varrho_{22} \quad .$$

$$2(A-B) = -\sqrt{(\varrho_{11}-\varrho_{12})^2 + 2(\varrho_{11}-\varrho_{12})(\varrho_{21}-\varrho_{22})\cos 2\omega + (\varrho_{21}-\varrho_{22})^2} \, .$$

Für das Folgende ist es bequem, einen Hilfswinkel τ einzuführen durch die Gleichung

$$\cos\tau = -\frac{A-B}{A+B} \quad ,$$

es ist dann

$$2A = (\varrho_{11} + \varrho_{12} + \varrho_{21} + \varrho_{22})\sin^2\frac{\tau}{2} \quad ,$$

$$2B = (\varrho_{11} + \varrho_{12} + \varrho_{21} + \varrho_{22})\cos^2\frac{\tau}{2} \quad .$$

Diese Werte wollen wir in die Gleichungen für a und b einsetzen, gleichzeitig jedoch die Integrale in denselben in der Weise umformen, dafs wir in der ersten $u = b^2z^2$, in der zweiten $u = a^2z^2$ setzen und das Verhältnis b/a mit k bezeichnen, wir erhalten so:

$$\frac{1}{a^3}\int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1+k^2z^2)^3(1+z^2)}} = \frac{4\pi}{3p}\,\frac{\varrho_{11}+\varrho_{12}+\varrho_{21}+\varrho_{22}}{\vartheta_1+\vartheta_2}\sin^2\frac{\tau}{2}$$

$$\frac{1}{b^3}\int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{\left(1+\frac{z^2}{k^2}\right)^3(1+z^2)}} = \frac{4\pi}{3p}\,\frac{\varrho_{11}+\varrho_{12}+\varrho_{21}+\varrho_{22}}{\vartheta_1+\vartheta_2}\cos^2\frac{\tau}{2} \quad .$$

Digitized by Google

Dividieren wir die Gleichungen durch einander, so erhalten wir eine neue, in der nur noch k und τ vorkommen, k ist also Funktion lediglich von τ und das Gleiche gilt also von den noch in den Gleichungen vorkommenden Integralen. Wenn wir dieselben daher in der Weise auflösen, dafs wir schreiben:

$$a = \mu \sqrt[3]{\frac{3p(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{8(\varrho_{11} + \varrho_{12} + \varrho_{21} + \varrho_{22})}} \quad ,$$

$$b = \nu \sqrt[3]{\frac{3p(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{8(\varrho_{11} + \varrho_{12} + \varrho_{21} + \varrho_{22})}} \quad ,$$

so sind μ und ν lediglich abhängig von τ, also von dem Axenverhältnisse der Ellipsen e = constans. Die in Betracht kommenden Integrale lassen sich sämtlich zurückführen auf ganze elliptische Integrale erster Art und deren Differentialquotienten nach dem Modul, können also mittels der LEGENDRE-schen Tafeln ohne neue Quadraturen gefunden werden. Indessen sind die Rechnungen weitläufig und ich habe deshalb die unten gegebene Tabelle[1]) berechnet, in welcher zu zehn Werten von τ die zugehörigen μ und ν sich finden, die Interpolation zwischen diesen Werten wird wohl immer genügende Genauigkeit bieten. Unser Resultat können wir dahin zusammenfassen: Die Gestalt der Druckellipse ist einzig bedingt durch die Form der Ellipsen e = constans, bei gleicher Gestalt sind die linearen Dimensionen derselben proportional der dritten Wurzel aus dem Drucke, umgekehrt proportional der dritten Wurzel aus dem Mittelwerte der Krümmungen, sowie proportional der dritten Wurzel aus dem Mittelwerte der elastischen Koefficienten ϑ, also sehr nahe proportional der dritten Wurzel aus dem Mittel der reciproken Elasticitätsmodule. Zu bemerken ist noch, dafs der Inhalt der Druckfläche unter sonst gleichen Umständen zunimmt, je länglicher ihre Gestalt ist; denken wir uns also von zwei in Berührung

[1])

τ	90	80	70	60	50	40	30	20	10	0
μ	1,000	1,128	1,284	1,486	1,754	2,136	2,731	3,778	6,612	∞
ν	1,000	0,893	0,802	0,717	0,641	0,567	0,493	0,408	0,319	0

Digitized by Google

befindlichen Körpern bei gleichbleibendem Drucke den einen um die gemeinsame Normale gedreht, so wird die Gröfse der Druckfläche ein Maximum, der mittlere Druck pr. Flächeneinheit ein Minimum in derjenigen Lage, für welche das Axenverhältnis der Druckellipse am meisten von 1 abweicht.

Unsere nächste Frage betrifft die Einsenkungen, welche die Körper erleiden und die Annäherung, welche sie infolge des Druckes erfahren; wir haben die letztere α genannt und ihren Wert schon gleich $(\vartheta_1 + \vartheta_2) L$ gefunden; indem wir das Integral L ein wenig umformen, erhalten wir:

$$\alpha = \frac{3p}{8\pi} \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{a} \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1+k^2z^2)(1+z^2)}} \quad .$$

Als Einsenkungen können wir passend die Annäherung des Mittelpunktes an die entfernten Teile der Körper bezeichnen; wir erhalten die Werte derselben sehr einfach, indem wir α durch Ausführung der Multiplikation mit $\vartheta_1 + \vartheta_2$ in zwei Summanden zerlegen. Denken wir uns für a seinen Wert eingesetzt, so erkennen wir, dafs α einen Zahlenfaktor enthält, welcher von der Gestalt der Druckellipse abhängt, dafs übrigens bei gleichem Werte dieses Faktors α proportional ist der $\frac{2}{3}$ Potenz des Druckes, der $\frac{2}{3}$ Potenz des Mittelwertes der Koefficienten ϑ, sowie der dritten Wurzel des Mittelwertes der Krümmungen. Werden eine oder mehrere dieser Krümmungen unendlich stark, so werden Annäherung und Einsenkungen unendlich grofs, diese Folgerung wird hinlänglich erläutert durch die eindringende Wirkung der Spitzen und Schneiden.

Wir hatten angenommen, dafs die Druckfläche so klein sei, dafs die undeformierten Oberflächen in einem gegen die Druckfläche grofsen Bereiche sich durch eine Fläche zweiten Grades darstellen liefsen. Nach Ausübung des Druckes können wir eine solche Voraussetzung nicht mehr machen, in der That wird aufserhalb der Druckfläche die Oberfläche sich nur durch eine verwickelte Funktion darstellen lassen. Es zeigt sich aber, dafs innerhalb der Druckellipse die Oberfläche mit derselben Annäherung wie vorher eine Fläche zweiten Grades geblieben ist. Man hat hier nämlich einmal $\zeta_1 - \zeta_2 = \alpha - Ax^2 - By^2 = \alpha - z_1 + z_2$,

Digitized by Google

andererseits $\zeta_1 = \vartheta_1 P$, $\zeta_2 = \vartheta_2 P$, also $\zeta_1 : \zeta_2 = \vartheta_1 : \vartheta_2$, drittens hat man als Gleichung der deformierten Oberfläche $z = z_1 + \zeta_1 = z_2 + \zeta_2$; aus diesen folgert man leicht unter Vernachlässigung einer Konstanten $(\vartheta_1 + \vartheta_2) z = \vartheta_2 z_1 + \vartheta_1 z_2$, welche Gleichung das ausspricht, was wir beweisen wollten; sie zeigt aufserdem, dafs sich die gemeinsame Oberfläche nach der Deformation zwischen die beiden ursprünglichen Oberflächen legen läfst, und der Oberfläche desjenigen Körpers ähnlicher ist, dessen Elasticitätsmodul der gröfsere ist. Bei Berührung von Kugeln gehört die Druckfläche gleichfalls einer Kugel an, bei der Berührung zweier Cylinder mit gekreuzten Axen einem hyperbolischen Paraboloid.

Wir haben bisher von den Formveränderungen gesprochen, wir ziehen jetzt die Spannungen in Betracht. Den Normaldruck in der Druckfläche haben wir schon gefunden:

$$Z_z = \frac{3p}{2ab\pi} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad .$$

Derselbe nimmt also zu vom Rande aus gegen die Mitte, wie die Ordinaten eines über der Druckellipse stehenden Ellipsoides, er ist Null am Rande und in der Mitte anderthalbmal so grofs, als wenn der Gesamtdruck sich gleichmäfsig über die Druckfläche verbreitete. Aufser Z_z lassen sich noch die beiden anderen Hauptspannungen im Nullpunkte in endlicher Form darstellen, es genüge anzugeben, dafs dies gleichfalls Drucke von der Ordnung von Z_z sind, die so stark sind, dafs, falls das Material überhaupt kompressibel ist, es in allen drei Richtungen zusammengedrückt wird. Ist die Druckfigur ein Kreis, so verhalten sich diese Kräfte zu Z_z wie $1 + 4\Theta/2(1 + 2\Theta) : 1$, für Glas beiläufig etwa wie $5/6 : 1$. Die Verteilung der Spannungen im Inneren hängt ab von der Form der Druckellipse, aufserdem aber auch wesentlich von dem Elasticitätskoefficienten Θ, so dafs sie eine ganz andere sein kann in dem einen und dem anderen zweier sich berührender Körper. Vergleichen wir die Spannungen in demselben Material bei gleicher Gestalt, aber ungleicher Gröfse der Druckellipse und verschiedener Gröfse des Druckes, so sehen wir, dafs die Spannungen in solchen Punkten, welche zur Druckfläche ähnlich liegen, proportional sind; aus den bekannten Spannungen für den einen

Digitized by Google

Fall erhalten wir die Spannungen für ähnlich gelegene Punkte des zweiten Falles, indem wir erstere multiplizieren mit dem Verhältnisse der Gesamtdrucke und dividieren durch das Verhältnis der Druckflächen. Denken wir zwei bestimmte Körper in Berührung und nur den Druck zwischen ihnen variabel, so wächst die Beanspruchung des Materials wie die dritte Wurzel aus diesem Drucke.

Es ist schliefslich wünschenswert, ein anschauliches Bild von der Verteilung der Spannungen im Inneren zu erhalten, die Formeln sind indes viel zu verwickelt, als dafs es möglich wäre, ein solches ohne weiteres aus denselben abzulesen. Man kann indessen durch Betrachtung der Spannungen in der Nähe der zAxe und der Nähe der Oberfläche eine angenäherte Vorstellung von dieser Verteilung erhalten. Das Resultat läfst sich etwa durch die folgende Beschreibung und die beistehende Fig. 19 wiedergeben. Letztere stellt einen Schnitt durch die z Axe und eine Axe der Druckellipse dar, gegen einander gekehrte Pfeile bedeuten einen Zug, von einander gekehrte einen Druck,

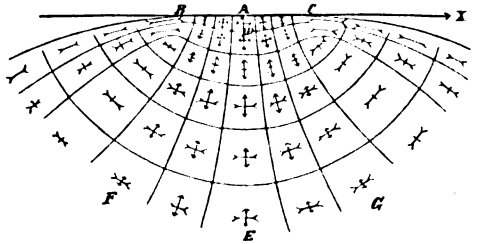


Fig. 19.

die Figur bezieht sich auf den Fall, dafs $\Theta = 1$. Das Stück $ABDC$ des Körpers, welches vorher eine Erhöhung über der Druckfläche bildete, ist nunmehr wie ein Keil in den Körper hineingepreſst, es pflanzt daher den Druck nicht nur in gerader Richtung AE, sondern auch, wenn auch nicht mit gleicher Stärke, in den schrägen Richtungen AF und AG fort; die Folge davon ist, dafs das Element A auch in seitlicher Richtung kräftig komprimiert wird, andererseits die Teile bei F und G das Bestreben erhalten, sich von einander zu entfernen und so die zwischen ihnen liegenden Teile spannen. Es herrscht also auf dem Flächenelemente, dessen Normale die x-Richtung hat, bei A Druck, der, wenn wir ins Innere gehen, auf Null sinkt und in Zug übergeht, welcher schnell ein Maximum erreicht und dann mit wachsender Entfernung wieder auf Null

Digitized by Google

absinkt. Da die bei A befindlichen Teile auch in seitlicher Richtung komprimiert sind, so müssen sämtliche Punkte der Oberfläche dem Nullpunkte genähert und also in der Richtung auf denselben angespannt sein, in der That geht der bei A in Richtung der x herrschende Druck, wenn wir auf der xAxe fortschreiten, noch innerhalb der Druckfläche in Zug über; letzterer erreicht in der Nähe der Grenze derselben sein Maximum, um dann wieder auf Null abzufallen. Die Rechnung ergiebt, dafs für $\Theta = 1$ diese Zugkraft bedeutend gröfser ist, als die im Inneren wirkenden. Was den dritten Hauptdruck, welcher senkrecht zur Zeichnungsebene ist, anlangt, so ist derselbe in der Axe natürlich von derselben Art, wie der in Richtung der x herrschende, in der Oberfläche ist er ein Druck, da hier sämtliche Punkte dem Nullpunkte genähert sind. Ist das Material inkompressibel, so vereinfacht sich das Bild; da nämlich die Teile bei A nicht zusammengehen, fallen die Zugkräfte in der Oberfläche fort.

Wir erwähnen noch kurz die Vereinfachungen, welche die Formeln erlangen, sobald die berührenden Flächen Kugel- oder Cylinderflächen, die längs einer erzeugenden Graden zusammenstofsen, sind. Im ersteren Falle ist einfach $k = \mu = \nu = 1$, $\varrho_{11} = \varrho_{12} = \varrho_1$, $\varrho_{21} = \varrho_{22} = \varrho_2$, also wird:

$$a = b = \sqrt[3]{\frac{3p(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{16(\varrho_1 + \varrho_2)}}, \qquad \alpha = \frac{3p(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{16a}.$$

Nicht ganz so direkt ergiebt sich die Formel für die Berührung zweier Cylinder. Wir lassen hier die grofse Axe der Ellipse a unendlich werden, dann müssen wir auch den Gesamtdruck p unendlich werden lassen, wenn der Druck auf die Längeneinheit des Cylinders endlich werden soll. In der zweiten der Gleichungen I) haben wir dann $B = (\varrho_1 + \varrho_2)/2$, ferner können wir u gegen a^2 vernachlässigen, a also vor das Integralzeichen nehmen und schliefslich für die unbestimmte Gröfse $p/a = \infty/\infty$ eine willkürliche endliche Konstante setzen; wir wählen als solche $\frac{4}{3}p'$, es wird sich gleich zeigen, dafs dann p' den Druck auf die Längeneinheit des Cylinders bezeichnet. Das Integral der Gleichung läfst sich nun ausführen, und dieselbe ergiebt:

Digitized by Google

$$b = \sqrt{\frac{p'(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{\pi(\varrho_1 + \varrho_2)}} \quad .$$

Für den Druck Z_x findet man:

$$Z_x = \frac{2p'}{\pi b^2}\sqrt{b^2 - y^2} \quad ;$$

man kann nun leicht sich überzeugen, dafs p' die ihm beigelegte Bedeutung hat. Die Annäherung α würde nach unserer allgemeinen Formel hier logarithmisch unendlich werden, der Sinn hiervon ist der, dafs sie nicht allein abhängt von den Vorgängen an der Druckstelle, sondern wesentlich bedingt ist durch die Form der ganzen Körper, ihre Bestimmung fällt daher aufserhalb des uns hier beschäftigenden Problems.

Teils um einen Beweis für die Zuverlässigkeit der gezogenen Folgerungen und deren Anwendbarkeit auf wirkliche Verhältnisse zu liefern, teils um ein Beispiel für die Benutzung derselben zu geben, will ich einige Versuche beschreiben, die ich angestellt habe, um die erlangten Formeln mit der Erfahrung zu vergleichen. Die Versuche wurden in der Weise ausgeführt, dafs die beiden in Betracht kommenden Körper mittels eines horizontalen, einarmigen Hebels aneinandergedrückt wurden, an dessen freiem Ende die den Druck bestimmenden Gewichte hingen, und an welchem in der Nähe des Drehpunktes der eine der Körper befestigt war. Der andere, welcher die Unterlage bildete, war mit einer möglichst dünnen Rufsschicht überzogen, welche die Gestalt der Druckfläche zurückhalten sollte. Der Hebel mit seiner Belastung wurde mittels einer Schraube vorsichtig auf die Unterlage herabgelassen und wieder von derselben abgehoben. War der Versuch gelungen, so durfte der Rufs nicht verwischt, sondern nur plattgedrückt sein, in durchfallendem Lichte liefsen sich dann die Druckstellen kaum erkennen, im reflektierten Lichte aber zeigten sie sich als glänzende kleine Kreise oder Ellipsen, die sich unterm Mikroskope ziemlich genau messen liefsen. Die folgenden Angaben sind immer schon das Mittel aus 5—8 Messungen.

Ich prüfte zunächst, ob die Dimensionen der Druckfläche wüchsen, wie die dritten Wurzeln aus dem Drucke. Zu dem Ende war am Hebel eine Glaslinse von 28,00 mm Radius be-

Digitized by Google

festigt, der kleine Hebelarm betrug 114,0 mm, der grofse 930 mm. Die Unterlage wurde durch eine ebene Glasplatte gebildet, an einem Stabe aus demselben Glase war der Elasticitätsmodul bestimmt und gleich 6201 kg/mm² gefunden. Das Verhältnis der Querkontraktion zur Längsdehnung für Glas ist nach WERTHEIM 0,32, daraus folgt $\Theta = 8/9$, $K = 2349\,\text{kg/mm}^2$, $\vartheta = 0{,}0005790\,\text{mm}^2/\text{kg}$. Hiernach ergiebt uns unsere Formel den Durchmesser des Druckkreises in mm: $d = 0{,}3650\,p^{1/3}$, wenn p in Kilogrammen gerechnet wird. In der folgenden Zusammenstellung giebt die erste Reihe in Kilogrammen die Gewichte am Ende des langen Hebels, die zweite den gemessenen Durchmesser der Druckfläche in Umdrehungen der Mikrometerschraube, deren jede = 0,2737 mm war. Die dritte Reihe endlich giebt den Quotienten $d : p^{1/3}$, diese Gröfse mufs nach dem Vorigen eine Konstante sein.

p	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
d	1,56	2,03	2,19	2,59	2,68	3,13	3,52	3,69	3,97	4,02
$d:\sqrt[3]{p}$	2,67	2,75	2,60	2,79	2,68	2,73	2,79	2,71	2,70	2,65

In der That bleibt also der genannte Quotient bis auf Unregelmäfsigkeiten konstant, obgleich die Gewichte bis zum 15fachen ihres Anfangswertes variieren. Um den theoretischen Wert desselben zu erhalten, haben wir den oben berechneten Faktor 0,3650 durch den Millimeterwert der Schraube zu dividieren und mit der dritten Wurzel des Verhältnisses des grofsen zum kleinen Hebelarm zu multiplizieren; wir erhalten so 2,685, eine Gröfse, welche mit dem Mittelwerte der Beobachtungen, nämlich 2,707, fast völlig zusammenfällt.

Ich habe zweitens die Sätze über die Gestalt der Druckfläche geprüft, indem ich zwei Glascylinder, die den gleichen Durchmesser 7,37 mm besafsen, unter verschiedener Neigung der Axen aneinanderpreſste. Nennen wir ω die Gröfse dieser Neigung, so wird bei Benutzung früherer Bezeichnungen: $\varrho_{11} = \varrho_{12} = \varrho$, $\varrho_{21} = \varrho_{22} = 0$, also $A + B = \varrho$, $A - B = -\varrho \cos\omega$, sonach der Hilfswinkel $\tau = \omega$. Bestimmt man daher für einen und denselben Druck die grofsen und kleinen Axen der Druck-

Digitized by Google

ellipse bei verschiedenen Neigungen, dividiert dann die grofsen Axen durch die dem Neigungswinkel zugehörige Funktion μ, die kleinen durch die zugehörige Funktion ν, so mufs das Resultat aller dieser Divisionen eine und dieselbe Konstante sein, und zwar die Gröfse $2(3p\vartheta/8\varrho)^{1/3}$. Die folgende Tabelle giebt nun in der ersten Spalte in Graden den Neigungswinkel ω, in den beiden folgenden die gemessenen Werte $2a$ und $2b$ in Teilen des hier angewandten Okularmikrometers, deren 96,0 ein Millimeter bedeuten, und in den beiden letzten die Quotienten $2a/\mu$ und $2b/\nu$.

ω	$2a$	$2b$	$\frac{2a}{\mu}$	$\frac{2b}{\nu}$
90	40,6	40,6	40,6	40,6
80	45,4	36,6	40,2	41,0
70	52,8	31,0	41,3	38,7
60	59,6	27,6	40,0	38,5
50	72,2	26,4	41,2	41,2
40	90,4	23,8	42,2	42,0
30	110,0	21,0	40,3	42,6
20	156,2	18,4	41,3	45,3
10	274,6	15,0	41,6	47,0

Die Quotienten ergeben also in befriedigender Weise denselben Wert, mit Ausnahme derjenigen für die kleinen Axen bei geringer Neigung. Es ist aber zu bemerken, dafs es bei einer solchen Neigung äufserst schwierig ist, die Cylinder so aufeinanderzubringen, dafs die gemeinsame Tangentialebene genau horizontal werde, bei jeder anderen Lagerung aber findet ein geringes Gleiten des einen Cylinders am anderen statt, welches die kleine Axe ungebührlich vergröfsert. Der Druck bei allen diesen Messungen betrug 12 kg, nehmen wir auch hier für ϑ den Wert 0,0005790, so folgt aus den gemachten Angaben für die theoretische Gröfse der Konstanten der Wert 40,80, welcher mit dem Mittel der aus a gefolgerten Werte, nämlich 40,97, fast völlig übereinstimmt, während er von dem Mittel der aus b gefolgerten, nämlich 41,88, aus den erwähnten Gründen um eine Kleinigkeit abweicht.

Ich habe schliefslich den Versuch gemacht, auch die Abhängigkeit von den Elasticitätsmodulen experimentell zu prüfen,

Digitized by Google

indem ich eine Stahllinse gegen ebene Flächen verschiedener Metalle preſste. Ich fand hier aber Schwierigkeiten in der Beobachtung; einmal nämlich ist es nicht so leicht, wie beim Glase völlig ebene und glatte Flächen zu erhalten, zweitens lassen sich die Metalle nicht so gut berufsen, drittens mufs man sich, um nicht die Elasticitätsgrenze zu überschreiten, auf sehr kleine Drucke beschränken. Alles wirkt zusammen, um nur unvollkommene Druckfiguren zu Stande kommen zu lassen, die dann bei der Messung der Willkür ziemlich freien Spielraum geben. Ich erhielt Werte, die durchgehends von der Ordnung der berechneten, aber mit zu grofsen Unsicherheiten behaftet waren, als dafs sie sich zu einer genauen Prüfung der Theorie eigneten. Auch zeigen die mitgeteilten Zahlen hinlänglich, dafs unsere Formeln keineswegs in der Luft schweben, und werden so die Anwendung rechtfertigen, die wir jetzt von ihnen machen wollen, und welche den Zweck hat, eine klarere Vorstellung von und ein exaktes Mafs für diejenige Eigenschaft der Körper zu gewinnen, welche wir Härte nennen.

Die Härte wird gewöhnlich definiert als die Festigkeit, welche die Körper dem Eindringen von Spitzen und Schneiden entgegensetzen. Die Mineralogen haben sich begnügt, in derselben eine nur nach mehr oder weniger angebbare Eigenschaft zu sehen; sie nennen härter denjenigen von zwei Körpern, welcher den anderen ritzt. Dafür. dafs sich nach dieser Definition eine Reihenfolge aller Körper nach ihrer Härte herstellen läfst, ist Bedingung, dafs, wenn A das B und B das C ritzt, dafs dann auch A das C ritzt und nicht umgekehrt, ferner, dafs, wenn eine Spitze aus A eine ebene Platte aus B ritzt, dann nicht etwa eine Spitze aus B wiederum in eine Platte von A eindringt. Die Notwendigkeit des Zutreffens dieser Voraussetzungen ist nicht von vornherein ersichtlich, indessen hat die Erfahrung dieselben gerechtfertigt, eine quantitative Bestimmung der Härte von irgend welchem Werte kann das erwähnte Verfahren nicht geben. Eine solche zu finden, sind verschiedene Versuche gemacht. Muschenbroek mafs die Härte durch die Zahl der Schläge, welche er auf den Kopf eines Meifsels führen mufste, um eine kleine Barre des zu untersuchenden Materials von gegebenen Dimensionen zu

Digitized by Google

durchschneiden; um das Jahr 1850 haben die Herren Crace-Calvert und Johnson die Härte bestimmt durch das Gewicht, welches nötig ist, um einen abgestumpften Stahlkonus mit ebener Endfläche von 1,25 mm Durchmesser in einer halben Stunde 3,5 mm tief in das zu untersuchende Material einzutreiben; in einem 1865 erschienenen Buche[1]) bestimmt Herr Hugueny die gleiche Eigenschaft durch das Gewicht, welches nötig ist, eine ganz bestimmte Spitze 0,1 mm in das Material einzusenken. Neuere Definitionsversuche habe ich nicht kennen gelernt. Allen diesen Versuchen lassen sich folgende Vorwürfe machen: 1. Es ist das erreichte Mafs nicht nur kein absolutes, da zur Bestimmung der Härte eines Körpers durchaus ein härterer erforderlich ist, sondern es ist vollständig abhängig von einer zufällig gewählten Spitze; aus den erhaltenen Werten können wir durchaus nicht schliefsen auf die zum Eintreiben einer anderen Spitze notwendigen Kräfte; 2. da endliche und dauernde Formveränderungen benutzt werden, so treten elastische Nachwirkungen, die doch mit der Härte nichts zu thun haben, in nicht zu übersehender Gröfse in die Messung ein, wie die Einführung der Zeit in die Definition der Herren Crace-Calvert und Johnson nur allzu deutlich zeigt, und es ist daher selbst zweifelhaft, ob die gemessene Härte den Körpern unter allen Umständen die Reihenfolge der gewöhnlichen Härteskala giebt; 3. kann man nicht behaupten, dafs die so gemessene Härte eine Eigenschaft der Körper in deren ursprünglichem Zustande ist (obgleich sie zweifellos durch denselben bedingt ist). Denn in der Lage der Messung ruht die Spitze schon auf dauernd gedehnten oder komprimierten Schichten des Körpers.

Ich will nun versuchen, an die Stelle dieser eine andere Definition zu setzen, welcher man die gleichen Vorwürfe nicht machen kann. Die Festigkeit zunächst will ich nicht bestimmt ansehen durch solche Kräfte, welche gewisse bleibende Änderungen hervorrufen, sondern durch die gröfsten Kräfte, welche eben noch wirken dürfen, ohne dafs (mit einer gewissen vorherbestimmten Genauigkeit) Abweichungen von der vollkommenen

[1]) M. F. Hugueny, Recherches expérimentales sur la dureté des corps.

Digitized by Google

Elasticität vorkämen. Da das Material nach Einwirkung solcher Kräfte in seinen Anfangszustand zurückkehrt, so ist die so definierte Festigkeit eine Gröfse, die sich wirklich auf das ursprüngliche Material bezieht, was man nicht in gleicher Weise von einer anders definierten Festigkeit aussagen kann. Das allgemeinste Problem der Festigkeit isotroper Körper wäre nun offenbar die Beantwortung der Frage: Innerhalb welcher Grenzen dürfen die auf ein Element wirkenden Hauptdrucke X_x, Y_y, Z_z liegen, damit die Elasticitätsgrenze nicht überschritten werde? Denken wir uns die X_x, Y_y, Z_z als rechtwinklig geradlinige Koordinaten, so wird es in diesem Systeme für jedes Material eine gewisse geschlossene oder teilweise ins Unendliche auslaufende Fläche um den Nullpunkt geben, welche der Elasticitätsgrenze entspricht; die X_x, Y_y, Z_z, welche den Punkten innerhalb dieser Fläche zugehören, werden ertragen, die übrigen nicht. Zunächst ist klar, dafs, wenn wir für das in Betracht kommende Matèriai diese Fläche oder die entsprechende Funktion $\Psi(X_x, Y_y, Z_z) = 0$ kennten, wir schon alle Fragen, zu deren Lösung uns die Härte verhelfen soll, beantworten könnten. Denn denken wir uns eine Spitze von gegebener Gestalt und aus gegebenem Material gegen einen anderen Körper gedrückt, so kennen wir nach dem Vorigen sämtliche in den Körpern auftretende Spannungen, wir haben also nur zu untersuchen, ob unter denselben eine ist, die einem Punkte aufserhalb der Fläche $\Psi(X_x, Y_y, Z_z) = 0$ entspricht, um sagen zu können, ob und in welchem der beiden Körper eine bleibende Deformation eintritt. Indessen ist zu einer Bestimmung jener Fläche bisher nicht einmal der Versuch gemacht, wir kennen nur einzelne Punkte derselben; so entsprechen die Schnittpunkte mit den positiven Axen der Druckfestigkeit, die mit den negativen Axen der Zugfestigkeit, andere Punkte der Torsionsfestigkeit; allgemein kann man sagen, dafs jedem Punkte der Festigkeitsfläche eine gewisse Art von Festigkeit entspricht. Wir werden daher auch die Härte einem bestimmt angebbaren Punkte der Festigkeitsfläche entsprechen lassen und uns begnügen, die Lage dieses zu kennen, so lange uns die Gesamtform verborgen ist. Dies Ziel erreichen wir durch folgende Definition: Die Härte ist die Festigkeit, welche ein Körper derjenigen Deformation entgegensetzt, die einer Be-

Digitized by Google

rührung mit kreisförmiger Druckfläche entspricht. Ein absolutes Maſs aber für die Härte erhalten wir, wenn wir festsetzen: Die Härte eines Körpers wird gemessen durch den Normaldruck auf die Flächeneinheit, welcher im Mittelpunkte einer kreisförmigen Druckfläche herrschen muſs, damit in einem Punkte des Körpers die Spannungen eben die Elasticitätsgrenze erreichen. Um diese Definition zu rechtfertigen, haben wir zu zeigen: 1. daſs die in ihr nicht berücksichtigten Nebenumstände auſser Belang sind, 2. daſs die Ordnung, in welche sie die Körper nach der Härte bringt, zusammenfällt mit der gewöhnlichen Härteskala. Um das erste zu beweisen, denken wir uns einen Körper aus dem Materiale A in Berührung mit einem Körper aus B, und einen anderen Körper aus A in Berührung mit einem Körper aus C. Die Form aller Oberflächen an den Berührungsstellen soll beliebig sein, wir nehmen aber an, daſs die Druckfläche ein Kreis sei, und daſs B und C härter als A oder gleich hart seien. Wir können dann den Gesamtdruck in beiden Berührungen gleichzeitig so von Null an wachsen lassen, daſs der Normaldruck im Mittelpunkte des Druckkreises beständig in beiden Fällen derselbe ist. Wir wissen, daſs dann in beiden Fällen überhaupt dieselben Spannungen gleichzeitig auftreten, gleichzeitig und in zur Druckfläche ähnlich gelegenen Punkten muſs daher auch die erste Überschreitung der Elasticitätsgrenze stattfinden. Wir würden daher auch aus beiden Fällen für die Härte dieselbe Gröſse gefunden haben und diese Härte würde demselben Punkte in der Festigkeitsfläche entsprochen haben. Übrigens ist klar, daſs die Elemente, in welchen die Überschreitung der Elasticitätsgrenze stattfindet, für verschiedene Materien eine sehr verschiedene Lage zur Druckfläche haben können, und daſs die Lage der Härtepunkte in der Druckfläche eine sehr unähnliche sein kann. Es ist noch darauf aufmerksam zu machen, daſs der zweite Körper, dessen wir uns bedient, um die Härte von A zu bestimmen, aus demselben Material A bestehen durfte, wir haben also zur Bestimmung der Härte eines Materiales ein anderes überhaupt nicht nötig; dies ist der Umstand, welcher uns berechtigt, obige Messung als eine absolute zu bezeichnen. Um den zweiten Punkt zu erweisen, denken wir uns zwei Körper von verschiedenem Material aneinanderge-

Digitized by Google

drückt, die Druckfläche sei ein Kreis, die nach unserer Festsetzung gemessene Härte des einen H, die kleinere des zweiten h. Lassen wir nun den Druck zwischen ihnen wachsen, bis der Normaldruck im Nullpunkte h eben übersteigt, so wird der Körper mit der Härte h eine dauernde Einsenkung erfahren, während der andere nicht über seine Elasticitätsgrenze hinaus angestrengt ist; indem wir die Körper nun mit passendem Drucke über einander bewegen, können wir in ersterem eine Reihe dauernder Eindrücke hervorbringen, während letzterer intakt bleibt. Ist der letztere eine Spitze, so können wir diesen Vorgang beschreiben als ein Geritztwerden des weicheren Körpers durch den härteren und es fällt sonach unsere Härteskala mit der mineralogischen zusammen. Allerdings sagt unsere Theorie nicht aus, ob das Gleiche gilt für alle die Berührungen, bei welchen die Druckfläche elliptische Gestalt hat, aber dies Schweigen ist gerechtfertigt. Man sieht leicht, dafs, ebenso gut wie unter Zuhilfenahme einer kreisförmigen Druckfläche, man die Härte definieren könnte unter Zuhilfenahme einer bestimmten Ellipticität derselben. Alle so verschieden definierten Härten werden kleine Abweichungen in den numerischen Werten von einander zeigen. Entweder nun es stimmt wenigstens die Reihenfolge der Körper in den verschiedenen Härteskalen überein, dann ist unsere Festsetzung überhaupt im Einklange mit der mineralogischen, oder dies findet nicht statt, dann ist der Fehler auf Seite der letzteren, da dieselbe dann eine bestimmte Härteskala überhaupt nicht zu geben vermag. Es scheint übrigens sehr wahrscheinlich, dafs die Abweichungen der verschieden definierten Härten von einander nur klein ausfallen würden, so dafs wir mit einem geringen Opfer an Genauigkeit in dem Bisherigen und Kommenden die Beschränkung auf eine kreisförmige Druckfläche bei Seite lassen könnten. Nur Versuche können sicheren Aufschlufs geben.

Es sei nun H die Härte eines Körpers und derselbe sei in Berührung mit einem anderen, dessen Härte gröfser als H. Dann ist die Aussage, welche wir mit Hilfe dieses Wertes machen können, die, dafs alle diejenigen und nur diejenigen Berührungen mit kreisförmiger Druckfläche ertragen werden, für welche

Digitized by Google

$$Z_z = \frac{3p}{2\pi a^2} = \frac{2}{\pi}\sqrt[3]{\frac{3p\,(\varrho_{11}+\varrho_{12}+\varrho_{21}+\varrho_{22})^2}{(\vartheta_1+\vartheta_2)^2}} \leqq H \quad ,$$

oder für welche

$$\frac{p\,(\varrho_{11}+\varrho_{12}+\varrho_{21}+\varrho_{22})^2}{(\vartheta_1+\vartheta_2)^2} \leqq \frac{\pi^3 H^3}{24} \text{ ist.}$$

Die Kraft, welche nötig ist, um eine Spitze mit kugelförmiger Endfläche in die ebene Fläche eines weicheren Körpers eben einzusenken, ist proportional der dritten Potenz der Härte dieses letzteren Körpers, dem Quadrate des Krümmungsradius der Endfläche, sowie dem Quadrate des mittleren Koefficienten ϑ für die beiden Körper. Um diese Aussage in bessere Übereinstimmung mit den üblichen Bestimmungen der Härte zu bringen, könnte man versucht sein, letztere nicht durch den Normaldruck selbst, sondern durch dessen dritte Potenz messen zu wollen. Abgesehen davon, dafs die erzeugte Analogie eine scheinbare wäre (denn es würde immer noch nicht die Kraft, welche eine und dieselbe Spitze in verschiedene Körper eintreibt, der Härte der letzteren proportional sein), widerspräche dieses Verfahren der Konsequenz, da es die Härte aus der Reihe der übrigen Festigkeiten herausrisse.

Obgleich sich unsere Folgerungen auf Schlüsse stützen, welche durch die Erfahrung gut bestätigt werden, sind sie doch selber einer Prüfung durch die Erfahrung sehr bedürftig. Denn es könnte sein, dafs die wirklichen Körper den Vorstellungen der Homogeneität, welche wir zugrunde gelegt haben, sehr wenig entsprechen; es ist ja bekannt genug, dafs die Festigkeitsverhältnisse in der Nähe der Oberfläche, auf welche es uns hier ankommt, häufig ganz andere sind, als diejenigen im Inneren der Körper. Ich selber habe nur wenige Versuche am Glase angestellt. Im Glase und allen ähnlichen Körpern besteht die erste Überschreitung der Elasticitätsgrenze in einem kreisförmigen Sprunge, der in der Oberfläche am Rande der Druckellipse entsteht und sich bei wachsendem Drucke nach aufsen kegelförmig ins Innere verbreitet. Wächst der Druck weiter, so umschliefst diesen Sprung ein zweiter, der sich gleichfalls ins Innere fortsetzt, dann diesen ein dritter u. s. f., natürlich wird die Erscheinung immer unregelmäfsiger.

Digitized by Google

Aus den Drucken sowohl, welche nötig sind, um unter gegebenen Umständen den ersten Sprung zu veranlassen, als auch aus der Gröfse dieses Sprunges, erhält man die Härte des Glases; ich fand so aus Versuchen, bei welchen ich eine harte Stahllinse gegen Spiegelglas preſste, für die Härte des letzteren 130 bis 140 kg/mm²; aus den Erscheinungen, welche beim Zusammenstoſse zweier Glaskugeln eintraten, konnte ich auf eine Härte von 150 schlieſsen, während sich aus den Sprungfiguren beim Zusammenpressen zweier dünner Glasstäbe mit natürlicher Oberfläche eine weit gröfsere Zahl, 180 bis 200, ergab. Zum Teil mögen diese Abweichungen in den Unvollkommenheiten der Versuche begründet sein (da auch dieselbe Versuchsanordnung ziemlich beträchtliche Abweichungen der einzelnen Resultate gab), zum Teil aber sind sie ohne Zweifel in der mangelhaften Homogeneität und der verschiedenen Oberflächenfestigkeit begründet. Ergeben sich so grofse Schwankungen wie die erwähnten als die Regel, so verlieren natürlich die aus unserer Theorie gezogenen numerischen Resultate ihre Bedeutung; unsere Betrachtungen geben dann immer noch einen Maſsstab ab für den Wert, welcher exakten Messungen über die Härte überhaupt beizulegen ist.

Digitized by Google

7. Über ein neues Hygrometer.

Aus den Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Sitzung vom 20. Januar 1882.

Herr Hertz teilt unter Vorführung seines neuen Hygrometers folgendes mit:

Bei diesem Hygrometer und den nach gleichem Prinzipe konstruierten wird die Feuchtigkeit gemessen durch das Gewicht, welches ein hygroskopischer, anorganischer Körper, insbesondere eine Lösung von Chlorcalcium an der Luft annimmt. Eine derartige Lösung wird aus der Luft so lange Wasser anziehen, resp. Wasser an die Luft abgeben, bis die Konzentration eine solche ist, dafs der Druck des über ihr gesättigten Wasserdampfes bei Lufttemperatur gleich dem Drucke des in der Luft wirklich vorhandenen (ungesättigten) Wasserdampfes ist. Variiert demnach Temperatur und Feuchtigkeit hinreichend langsam, um den Gleichgewichtszustand zu stande kommen zu lassen, so folgt aus der Temperatur und dem Gewichte der Lösung die absolute Feuchtigkeit. Da aber der Druck des über einer Salzlösung gesättigten Dampfes für die meisten Salze, wie es scheint, jedenfalls für Chlorcalcium (und Schwefelsäure), bei den in Betracht kommenden Temperaturen angenähert ein und derselbe Bruchteil des Druckes des über Wasser gesättigten Dampfes ist, so folgt mit einer für viele Zwecke hinreichenden Genauigkeit unmittelbar aus dem Gewichte die relative Feuchtigkeit. Auch falls möglichst grofse Genauigkeit angestrebt wird, kann der Einflufs der Temperatur als Korrektion in Rechnung gebracht werden, so dafs dieselbe nur angenähert bekannt zu sein braucht.

Der ausgesprochene Grundgedanke kann nach doppelter Richtung verwertet werden, je nachdem man ein Instrument

Digitized by Google

verlangt, welches den Änderungen der Feuchtigkeit schnell folgt, von dem aber grofse Genauigkeit nicht gefordert wird, wie es für Wagezimmer etc. erwünscht ist; oder ein Instrument, welches genau sei, von dem man dann aber nur die mittlere Feuchtigkeit über einen längeren Zeitraum, über Tage, Wochen oder Monate zu wissen wünscht, wie es für meteorologische Zwecke notwendig ist. Ein Instrument der ersten Art wurde in der Sitzung gezeigt. Die hygroskopische Substanz war ein Stück Seidenpapier von 1 cm^2 Oberfläche, welches mit Chlorcalciumlösung getränkt war. Dasselbe war an einem ca. 10 cm langen Hebelarm (Glasfaden) befestigt, der seinerseits auf einem sehr dünnen horizontal gespannten Silberdraht safs, dergestalt, dafs das ganze eine sehr empfindliche Torsionswage bildete. Das Hygrometer war mittels verschiedener Schwefelsäuremischungen nach REGNAULT kalibriert. Im trockenen Raume zeigte der Glasfaden ca. 45° nach oben, in einem Raume von den relativen Feuchtigkeiten 10, 20, ... 90 pCt. senkte er sich um respektive 18, 31, 40, 47, 55, 62, 72, 86, 112 Bogengrade nach unten, in gesättigtem Wasserdampfe müfste er natürlich senkrecht nach unten stehen. Über den Temperatureinfluſs war nur festgestellt, dafs derselbe sehr klein war, bei gleicher relativer Feuchtigkeit stand der Zeiger bei 0° etwa 1—2 Bogengrade tiefer als bei 25°. In einen Raum von veränderter Feuchtigkeit gebracht, nahm das Instrument seine neue Ruhelage so schnell ein, dafs es nach 10 bis 15 Minuten abgelesen werden konnte. Ein Nachteil des Instrumentes besteht darin, dafs bei grofser Feuchtigkeit (von 85 pCt. aufwärts) sich sichtbare Tropfen auf dem Papiere bilden, die bei unvorsichtiger Behandlung leicht abgewischt oder bei sehr grofser Feuchtigkeit auch abgeschüttelt werden können.

Instrumente der zweiten Art würden einfach in mit Chlorcalciumlösung gefüllten Glasgefäfsen zu bestehen haben, deren Gröfse nach dem Zeitraum zu bemessen wäre, über welchen man die mittlere Feuchtigkeit verlangt und deren Gewicht entweder von Zeit zu Zeit bestimmt wird, oder welche an einer selbstregistrierenden Wage aufgehängt sind.

Digitized by Google

8. Über die Verdunstung der Flüssigkeiten, insbesondere des Quecksilbers, im luftleeren Raume.

Aus Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie, Bd. 17, S. 177—193, 1882.

Verdunstet eine Flüssigkeit in einem Gase, dessen Druck gröfser ist als der Druck des gesättigten Dampfes der Flüssigkeit, so ist der Dampf in der Nähe der Oberfläche beständig dem Sättigungszustande aufserordentlich nahe, und die Geschwindigkeit, mit welcher die Verdunstung erfolgt, ist in erster Linie bedingt durch die Geschwindigkeit, mit welcher der entstehende Dampf abgeführt wird. Die Entfernung des Dampfes aber erfolgt, wenigstens durch die der Oberfläche nächsten Schichten, auf dem Wege der Diffusion. Von dieser Vorstellung ausgehend, hat man die Verdunstung einer Flüssigkeit in einem Gase häufig in Betracht gezogen. Hingegen hat man bisher, wie es scheint, noch keine Aufmerksamkeit den Bedingungen geschenkt, welche die Verdunstungsgeschwindigkeit in einem Raume regeln, in welchem sich aufser der Flüssigkeit nur deren eigener Dampf befindet. Gerade in diesem Sinne aber soll von der Verdunstung in vorliegendem Aufsatze die Rede sein. Zunächst ist auch im luftleeren Raume die Verdunstung mitbedingt durch die Geschwindigkeit, mit welcher der gebildete Dampf entweichen kann, insofern dies Entweichen durch die innere Reibung unter Umständen sehr verlangsamt wird, aber offenbar ist diese Bedingung eine sehr unwesentliche. Denn denken wir uns die Verdunstung geschehend zwischen zwei ebenen parallelen Flüssigkeitsflächen, so könnte um ihretwillen die Verdunstung mit unendlicher Geschwindigkeit erfolgen. Sodann kann man die Geschwindigkeit, mit welcher der Flüssigkeitsoberfläche Wärme zugeführt wird, angeben als Bedingung der Verdunstung. Allerdings

Digitized by Google

wird im stationären Zustande genau eine solche Menge von Flüssigkeit verdunsten, dafs deren latente Wärme gleich der zugeführten Wärme ist, aber diese Auskunft ist eine unvollständige, denn man kann mit demselben Rechte auch umgekehrt die Wärmezufuhr als bedingt ansehen durch die Verdunstung. Beide nämlich hängen ab von der Temperatur der äufsersten Oberfläche, diese aber wiederum ist bedingt durch das Verhältnis der möglichen Wärmezufuhr durch Leitung und der möglichen Wärmeabfuhr durch Verdunstung. Zweierlei kann nun nur der Fall sein: entweder a) die Verdunstung ist wenigstens an keine andere Grenze gebunden, als diejenige, welche durch die Wärmezufuhr gesteckt ist, und es kann von einer gegebenen Oberfläche in der Zeiteinheit bei hinreichender Wärmezufuhr eine unbegrenzte Menge von Flüssigkeit abdunsten, ohne dafs Temperatur, Dichte und Druck des abziehenden Dampfes sich merklich von denen des gesättigten Dampfes unterschieden: dann müssen alle in demselben Raume befindlichen Flüssigkeitsoberflächen die gleiche Temperatur annehmen, und diese Temperatur sowohl als auch die verdunstenden Flüssigkeitsmengen sind bedingt durch das Verhältnis der möglichen Wärmezufuhr zu den verschiedenen Oberflächen; oder b) es kann von einer Flüssigkeitsoberfläche von gegebener Temperatur nur eine begrenzte Menge Flüssigkeit abdunsten; dann können in demselben Raume Oberflächen von verschiedener Temperatur bestehen, und Druck und Dichte des übergehenden Dampfes müssen von Druck und Dichte des gesättigten Dampfes mindestens einer dieser Oberflächen um ein Endliches verschieden sein; die Geschwindigkeit der Verdunstung hängt ab aufser von einer Reihe von Nebenbedingungen in erster Linie von der Natur der Flüssigkeit, es bestände dann also für jede Flüssigkeit ein spezifisches Verdunstungsvermögen. Es ist ersichtlich, dafs die Alternative a) als ein Grenzfall derjenigen von b) betrachtet werden kann, und dafs also ohne Hypothese oder Belehrung durch die Erfahrung nur die letztere, allgemeinere als richtig kann angenommen werden; weiter unten wird aber eine genauere Überlegung zeigen, dafs die erstgenannte Alternative sogar als äufserst unwahrscheinlich bezeichnet werden kann.

In der Absicht, eine experimentelle Entscheidung zwischen

Digitized by Google

den beiden genannten Alternativen herbeizuführen, womöglich durch die exakte Messung des Verdunstungsvermögens für irgend eine Flüssigkeit unter verschiedenen Bedingungen, habe ich eine Reihe von Versuchen über die Verdunstung im luftleeren Raume ausgeführt, welche indessen ihr Ziel nur teilweise erreicht haben. Nichtsdestoweniger beschreibe ich dieselben hier, da sie geeignet sind, das Problem, um welches es sich handelt, klarer zu legen und vielleicht den Weg zu besseren Methoden zeigen können. Diese Beschreibung folgt unter I; unter II knüpfe ich daran eine Reihe von Überlegungen, welche die zu Grunde liegende Vorstellung rechtfertigen und wenigstens Grenzen für die in Betracht kommenden Gröfsen feststellen sollen.

I. Bei den Versuchen ging ich von der Annahme aus, dafs die Geschwindigkeit der Verdunstung von einer Oberfläche jedenfalls bestimmt sei durch die Temperatur der Oberfläche und den Druck, welchen der entweichende Dampf auf sie ausübt. Im Verlaufe der Untersuchung kamen mir Zweifel, nicht ob jene beiden Gröfsen notwendige, sondern ob sie auch die hinreichenden Bedingungen für die Menge der verdunstenden Flüssigkeit seien; aus den Betrachtungen in II wird man sehen, dafs dieser Zweifel ungerechtfertigt ist. Ich stellte mir also die nähere Aufgabe, für irgend eine Flüssigkeit zusammengehörige Werte der Temperatur t einer Oberfläche, des Druckes P auf sie und der Höhe h der in der Zeiteinheit abdunstenden Flüssigkeitsschicht zusammenzustellen. Die Schwierigkeit, welche die Lösung dieser scheinbar einfachen Aufgabe hat, besteht in der Bestimmung von t und P. Ist die Verdunstung auch nur eine mäfsige, so sind doch schon sehr grofse Wärmemengen nötig, um sie zu unterhalten; dieser Umstand hat zur Folge, dafs die Temperatur von der Oberfläche aus ins Innere reifsend zunimmt; taucht daher ein Thermometer auch nur ein wenig in die Flüssigkeit ein, so zeigt es schon nicht mehr die wahre Oberflächentemperatur. Es ergeben ferner die Versuche, dafs bei mäfsiger Verdunstung die Abweichung des Druckes vom Drucke des gesättigten Dampfes jedenfalls sehr klein ist; da es gerade auf diese Abweichung ankommt, so folgt, dafs beide Drucke sehr genau gemessen werden müssen. Endlich befinden sich die Flüssigkeiten im Inneren bei diesen

Digitized by Google

Versuchen notwendigerweise im überhitzten Zustande; da nun stofsweises Sieden die Versuche unmöglich machen würde, so ist man auf ein sehr enges Gebiet von Temperatur und Druck beschränkt.

Ich übergehe die Versuche, welche ich mit Wasser anstellte, da ich bald bemerkte, dafs das Wasser wegen seiner grofsen latenten Wärme und seines geringen Leitungsvermögens wenig geeignet für mein Vorhaben sei. Als die geeignetste Flüssigkeit erschien das Quecksilber, welches mit einer relativ kleinen latenten Wärme ein metallisches Leitungsvermögen verbindet und aufserdem wegen des geringen Druckes seines Dampfes und seiner grofsen Kohäsion die Fähigkeit besitzt, starke Überhitzungen ohne Sieden zu ertragen. Die ersten Versuche wurden in dem in Fig. 20 dargestellten Apparate ausgeführt. In die Retorte *A*, welche sich inmitten eines Heizkastens befand, war ein oben offenes, unten geschlossenes Glasrohr eingeschmolzen, in welchem inmitten des Quecksilbers und dicht unter der Oberfläche desselben das die Temperatur angebende Thermometer sich befand, die Vorlage *B* bestand in einer Röhre, welche in einem gröfseren Kühlgefäfse auf 0° oder auf einer anderen Temperatur erhalten werden konnte. Aus dem Apparate waren durch gleichzeitige Benutzung einer Quecksilberluftpumpe und starken Auskochens alle mefsbaren Spuren von Luft entfernt. Die Geschwindigkeit der Verdunstung wurde nun gemessen durch die Geschwindigkeit, mit welcher das Quecksilber im Rohre *B* stieg, der Druck *P* sollte gar nicht direkt gemessen werden, sondern einer häufig ausgesprochenen Anschauung folgend, glaubte ich, dafs derselbe nicht gröfser als der Druck des gesättigten Dampfes sein könnte, welche der niederen Temperatur der Vorlage entsprach, und dafs also nur letztere Temperatur zu ändern sein würde, damit der Druck verschiedene und bekannte Werte annähme. Die Irrigkeit dieser Annahme wurde bald klar, denn wenn die Temperatur anfing, 100° zu überschreiten, und die Verdunstung

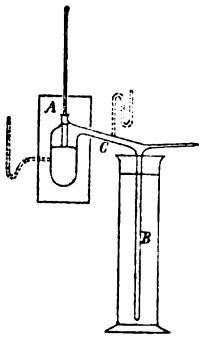


Fig. 20.

Digitized by Google

einigermafsen beträchtlich wurde, kondensierte sich der Dampf keineswegs in dem kalten Rohre *B*, sondern in dem Verbindungsrohre, etwa bei *C*, und erhitzte dasselbe so stark, dafs es nicht mehr berührt werden konnte, jedenfalls höher als auf 60 bis 80°. Dies ist unverständlich, wenn man annimmt, dafs der Dampf den äufserst geringen Druck besessen habe, welcher dem gesättigten Dampfe von 0° zukommt, er hätte dann durch Berührung mit einer Fläche von 60° nur überhitzt und keineswegs zur Kondensation veranlafst werden können. Um nun den Druck des Dampfes zu bestimmen, brachte ich bei *C* das in der Zeichnung angedeutete Manometerrohr an. Aber dasselbe zeigte bei wachsender Geschwindigkeit der Verdunstung keine Änderung seines anfänglichen Standes. Es war indes zu beachten, dafs der Dampf jedenfalls eine gewisse Geschwindigkeit besitzen müsse, dafs daher auch sein Druck auf die Oberflächen, aus welchen er entsprang, und in welche er einmündete, ein anderer sein müsse als derjenige, welchen er in sich selber besafs. Dafs seine Geschwindigkeit sogar eine recht beträchtliche war, darauf deutete die Erscheinung selbst hin, denn wenn die sich an der Glaswand absetzenden Quecksilbertröpfchen eine gewisse Gröfse erreichten, fielen sie nicht, ihrer Schwere folgend, senkrecht ab, sondern wurden fast parallel der Richtung der Röhre abgerissen. Um nun zu sehen, ob der Dampf auf die verdunstende Fläche einen Druck ausübe (auf welchen Druck es schliefslich hier ankam), schmolz ich jetzt das Manometerrohr bei *A* in der durch die Figur angedeuteten Weise an, derart, dafs die Retorte selbst den offenen Schenkel darstellte. Hier nun erhielt ich einen sehr bemerklichen Druck, nämlich beispielsweise 2 bis 3 mm, wenn das Thermometer 160 bis 170° zeigte und gleichzeitig eine Schicht von ca. 0,8 mm in der Minute abdunstete. Hiernach lag kein Widerspruch mehr darin, dafs der Dampf bei seiner Kondensation eine 100° überschreitende Temperatur hervorbrachte, aber es war klar, dafs die versuchte einfache Methode nicht zum Ziele führe, sondern dafs direkte Druckmessungen erforderlich seien. Es wurde deshalb der Apparat Fig. 21 benutzt. *A* ist wieder das wie früher eingerichtete Retortenrohr; der in der Zeichnung nur angedeutete Heizkasten, welcher gleichzeitig das Glasgefäfs trägt, besteht aus einem

Digitized by Google

die Retorte eng umschliefsenden, mit einer Asbesthülle umgebenen Hohlcylinder von Messing, welcher $1^1/_2$ cm Wandstärke hat, durch einen Kranz kleiner Gasflammen erhitzt wird und einen senkrechten Schlitz besitzt, durch welchen hindurch das Niveau des Quecksilbers genau erkennbar bleibt. *B* ist wieder die Vorlage; hinzu kommt gegen früher das Manometerrohr *C*, welches in der Zeichnung perspektivisch dargestellt ist. Dem Fernrohre des beobachtenden Kathetometers war eine solche Vergröfserung gegeben, dafs auf $^1/_{50}$ mm sicher eingestellt werden konnte. Der Unterschied der beiden Niveaus, d. h. der Druck wurde mittels eines Okularschraubenmikrometers mit zwei Fäden gemessen, die absolute Höhe des Niveaus zu verschiedenen Zeiten, d. h. die Verdunstungsgeschwindigkeit wurde an der Skala des Instrumentes abgelesen. Die Temperatur wurde durch verschiedenen Gaszufluſs variiert, bei gleichen Temperaturen wurden verschiedene Drucke dadurch möglich gemacht, dafs in den Apparat, welcher anfangs völlig luftfrei war, kleine und verschiedene Mengen Luft eingeführt wurden. Betrug der Druck der eingeführten Luft etwa 1 mm, so konnte keine Verdunstung in unserem Sinne eintreten, bis nicht der Druck des über der Oberfläche gesättigten Dampfes gröfser als 1 mm war, d. h. bis nicht die Temperatur der Oberfläche 120° überstieg, überstieg aber die Temperatur dieses Mafs, so wich die Luft in die Vorlage zurück, und es trat Verdunstung ein, aber nun natürlich unter gröfserem Drucke als vorher bei gleicher Temperatur in dem luftleeren Apparate.[1]) Was nun die drei zu messenden Gröfsen *h*, *P* und *t* anlangt, so hatte die Bestimmung der ersten keinerlei Schwierigkeit; die Be-

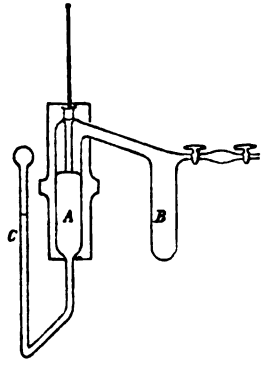


Fig. 21.

[1]) Da sich also während der Beobachtung in der Retorte und im Verbindungsrohre keine Luft befand, so bietet die Einführung der letzteren keinen Einwurf dar gegen die Überschrift, unter welcher diese Versuche beschrieben sind, welche Überschrift übrigens nur der Kürze halber an die Stelle einer präciseren gesetzt worden ist.

Digitized by Google

stimmung der zweiten P machte allerdings aufser der genauen Messung des Niveauunterschiedes noch die Kenntnis sehr grofser Korrektionen wegen der Ausdehnung des Quecksilbers u. s. w. notwendig, welche die zu messende Gröfse teilweise bedeutend übertrafen, aber diese Korrektionen konnten durch eine sorgfältige Anwendung der Theorie und durch besondere Versuche soweit ermittelt werden, dafs die schliefslichen Drucke auf etwa 0,1 mm sicher waren, und dafs die bleibende Unsicherheit den Wert wenigstens eines grofsen Teiles der Beobachtungen nicht schädigte. Am unsichersten war die Bestimmung von t; ich glaubte annehmen zu dürfen, dafs die wahre mittlere Temperatur der Oberfläche nur um wenige Grade verschieden sein könne von derjenigen Temperatur, welche das Thermometer anzeigte, wenn das obere Ende seines beiläufig 18 mm langen Gefäfses gerade in die Oberfläche fiel, und dafs jene eher etwas höher als diese sein müsse, indem ich mir vorstellte, dafs die Wärmezufuhr zur Oberfläche in überwiegendem Mafse durch die ersichtlich schnellen Strömungen erfolge, und dafs diese Strömungen an der erhitzten Aufsenwand aufwärts, dann dicht an der Oberfläche entlang, endlich abgekühlt am Thermometerrohr abwärts führen müfsten. War diese Vorstellung gerechtfertigt, so befand sich das Gefäfs des Thermometers an der kältesten Stelle, welche sich in der Flüssigkeit überhaupt vorfand.

Mit dem beschriebenen Apparate habe ich eine grofse Zahl von Versuchen angestellt bei Temperaturen, welche zwischen 100 und 200° lagen und bei neun verschiedenen Drucken, d. h. bei neun verschiedenen Füllungen mit Luft. Die Einzelbeobachtungen zeigten natürlich manche Unregelmäfsigkeiten; waren indes konstante Fehler nicht vorhanden, so ergab sich unzweifelhaft das folgende Resultat: Der beobachtete Druck P war allemal kleiner, als der Druck P_t des der Temperatur t zugehörigen gesättigten Dampfes; bei gleicher Temperatur war die Höhe der in der Zeiteinheit abdunstenden Schicht der Differenz $P_t - P$ proportional; für einen Wert dieser Differenz von 1 mm Quecksilber betrug die Höhe der sich in einer Minute verflüchtigenden Schicht bei 120° etwa 0,5 mm, bei 150° etwa 0,35 mm, bei 180 bis 200° etwa 0,25 mm. Als Beispiel mag derjenige Fall angeführt werden,

Digitized by Google

welcher die gröfste überhaupt beobachtete Verdunstungsgeschwindigkeit zeigte, in diesem Falle war das Gefäfs völlig luftleer, die Temperatur betrug 183,3°, der Druck 3,32 mm, und es sank der Spiegel des Quecksilbers gleichmäfsig um 1,80 mm in der Minute. Da nun der Druck des gesättigten Dampfes[1]) bei 183,3° gleich 10,35 mm, bei 153,0° hingegen gleich 3,32 mm ist, so mufs man einen Fehler in der Druckmessung von 7 mm oder in der Temperaturmessung um 30° annehmen, wenn man nicht die Existenz einer begrenzten, der Flüssigkeit eigentümlichen Verdunstungsgeschwindigkeit als bewiesen ansehen will. Der erstgenannte Fehler war unmöglich, der letztgenannte schien wenigstens so. Indessen konnte ich mir nicht verhehlen, dafs die Resultate, als quantitative betrachtet, sehr unsicher seien, und ich versuchte deshalb, dieselben durch andere Versuche zu stützen. Zu dem Ende stellte ich Beobachtungen mit dem Apparate an, welcher in Fig. 22a dargestellt ist. Das manometerartige, völlig luftleere Glasgefäfs *A* befindet sich in einem Heizkasten von dickem Gufseisen im Paraffinbade, das Niveau des Quecksilbers in beiden Schenkeln ist durch eine ebene Glasplatte von aufsen zu beobachten. Der offene Schenkel kommuniziert mit der kalten Vorlage *B*, das Verbindungsrohr ist nicht allzu dick, damit die Verdunstung eine langsame sei, die kleine Vorlage innerhalb des Heizgefäfses soll verhindern, dafs kondensiertes Quecksilber in das Retortenrohr zurückfliefst. Die Beobachtung der Verdunstungsgeschwindigkeit hat nun keine Schwierigkeit, ebensowenig die des Druckes, wenigstens insofern man den Druck des gesättigten Dampfes im geschlossenen Schenkel als bekannt ansieht, die Unsicherheit liegt wieder in der Bestimmung der Temperatur der verdunstenden Oberfläche. Diese Temperatur ist gleich derjenigen des Bades, vermindert um eine Korrektion, welche für denselben Apparat nur Funktion des zur Oberfläche führenden Wärmestromes ist. Aus der bekannten Verdunstungsgeschwindigkeit ergiebt sich die notwendige Wärmezufuhr, hieraus kann wieder die Temperatur-

[1]) Wegen aller Angaben, welche in der vorliegenden Arbeit über den Druck des gesättigten Quecksilberdampfes gemacht werden, verweise ich auf die gleich folgenden Bestimmungen. [Siehe No. 9, S. 215.]

Digitized by Google

differenz gefolgert werden, falls genannte Funktion bestimmt ist. Zur Ermittelung der letzteren wurden besondere Versuche angestellt, die durch Fig. 22b erläutert werden. Einem Stücke desselben Rohres, aus welchem das Manometer gefertigt war, wurde an seinem unteren Ende die Gestalt des Manometerschenkels gegeben und dasselbe ebensoweit wie das Manometerrohr mit Quecksilber gefüllt; über das Quecksilber kam eine Schicht Wasser von ca. 10 cm, in welcher sich ein Thermometer und ein Rührer befand. Dies Rohr wurde bis zum Niveau des Quecksilbers in ein etwas erwärmtes Leinölbad getaucht, dessen Temperatur ein zweites Thermometer angab. Es trat dann bald ein stationärer Wärmestrom vom Bad durch das Quecksilber zum Wasser ein, die Differenz der beiden Thermometer gab die Differenz zwischen den Temperaturen des Bades und derjenigen der Quecksilberoberfläche, das Wachstum der Temperatur gab den zugehörigen Wärmestrom. Selbstredend war eine Reihe von Korrekturen notwendig, nach Anbringung derselben ergab sich, dafs der Wärmestrom etwas schneller wuchs als die Temperaturdifferenz, und dafs beispielsweise eine Differenz von 10,0° notwendig war, um der Oberfläche in der Minute eine Wärmemenge zuzuführen, mit welcher eine über der Oberfläche stehende Schicht Wasser von 117 mm Höhe um 0,48° erwärmt werden konnte. Diese Angabe will ich benutzen, um einen mit dem Verdunstungsapparate angestellten Versuch zu berechnen. Es wurde gefunden, dafs bei einer Temperatur des Bades von 118,0°, bei einer Niveaudifferenz von 0,26 mm in 3,66 Minuten das Quecksilber in jedem der beiden Schenkel um 0,105 mm (als Mittel aus den Messungen an beiden Schenkeln) sank. Da die Verdunstung nur in einem Schenkel stattfand, so entfernte sich aus diesem in der Minute eine Schicht von $2 \times 0{,}105/3{,}66 = 0{,}057$ mm Höhe. Um eine Gewichtseinheit Quecksilber bei 118° unter dem Drucke des gesättigten Dampfes zu verflüchtigen, ist so viel Wärme nötig, wie erforderlich ist, um 72,8 Einheiten Wasser um 1° zu erwärmen. Mit grofser

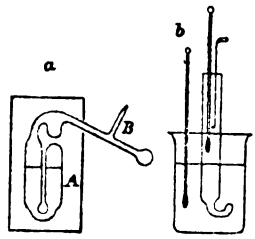


Fig. 22.

Digitized by Google

Annäherung können wir diesen Wert auch für die Berechnung unseres Versuches anwenden, es mufste darnach während desselben der Oberfläche in der Minute so viel Wärme zugeführt werden, dafs damit eine Wasserschicht von $0{,}057 \times 13{,}6 \times 72{,}8 = 56{,}4$ mm Höhe um 1^0, oder dafs eine Wasserschicht von 117 mm Höhe um $56{,}4/117 = 0{,}48^0$ hätte erwärmt werden können. Nach dem Vorigen mufste zu diesem Ende zwischen der Oberfläche und dem Bade eine Temperaturdifferenz von $10{,}0^0$ bestehen, es war also die wahre Temperatur der verdunstenden Oberfläche $108{,}0^0$. Da das Quecksilber in dem offenen Schenkel kälter als in dem geschlossenen war, so ist der gemessene Niveauunterschied, nämlich 0,26 mm, etwas kleiner, als er bei gleicher Temperatur beider Schenkel gewesen wäre, eine Diskussion der Wärmeverteilung im Inneren des Rohres ergiebt die erforderliche Korrektion zu 0,03 mm, und der Druckunterschied in den Schenkeln wird daher 0,29 mm in Quecksilber von 118^0 oder gleich 0,28 mm in Quecksilber von 0^0 gerechnet. Ziehen wir von diesem Druckunterschiede den Unterschied der Sättigungsdrucke von 118 und 108^0 ab, so erhalten wir den Abstand des Druckes auf die verdunstende Oberfläche vom Sättigungsdrucke. Der abzuziehende Unterschied aber beträgt 0,27 mm, und es bleibt also nur 0,01 mm. Es zeigt sich demnach, dafs der Druck des entweichenden Dampfes vom Sättigungsdrucke nur um ein Unmerkliches abweicht, und das gleiche Resultat ging aus sämtlichen Beobachtungen hervor, die nach gleicher Methode angestellt wurden. Bei kleinen Temperaturen (90 bis 100^0) fanden sich allerdings Abweichungen von einigen Hundertstel Millimetern im erwarteten Sinne, dafür aber wurden bei höheren Temperaturen selbst Drucke berechnet, welche den Sättigungsdruck ein wenig übertrafen. Die Korrektionen enthielten also offenbar kleine Fehler, was nach der Art der Bestimmung derselben auch zu vermuten war. Zweierlei aber zeigten die gemachten Versuche unzweideutig, nämlich erstens, dafs sie auch in gröfserer Zahl nicht geeignet seien, quantitative Resultate zu geben, da die zu beobachtenden Gröfsen innerhalb der konstanten Versuchsfehler der Methode lagen, zweitens, dafs auch die nach der früheren Methode erhaltenen positiven Resultate teilweise, ja vielleicht gänzlich ihren Ursprung in den Fehlern der Tempe-

Digitized by Google

raturmessung hatten.[1]) Denn wären jene richtig, so hätten sich in den letzten Versuchen Druckabweichungen von 0,10 bis 0,20 mm zeigen müssen, welche der Beobachtung nicht hätten entgehen können.

Das Gesamtergebnis der Versuche ist daher ein sehr bescheidenes, sie zeigen, dafs vom Standpunkte der Anwendung aus der Druck des entweichenden Dampfes auf die Flüssigkeit gleich dem Drucke des der Oberflächentemperatur entsprechenden gesättigten Dampfes gesetzt werden, und also die in der Einleitung zuerst erwähnte Alternative als richtig angesehen werden kann, sie zeigen aber nicht mit Bestimmtheit die kleine Abweichung, welche von dieser Regel höchst wahrscheinlich statt hat, und an welche sich das theoretische Interesse knüpft.

II. Wir betrachten den stationären Vorgang der Verdunstung, welcher zwischen zwei unendlichen, ebenen, parallelen Flüssigkeitsflächen eintritt, wenn dieselben auf konstanten, aber für beide Flächen verschiedenen Temperaturen gehalten werden und der übergedunsteten Flüssigkeit durch irgend welche Kanäle ein Weg geboten wird, an ihren Ausgangspunkt zurückzugelangen. Alle Dampfteilchen werden von der einen zur anderen Oberfläche in der Richtung der gemeinsamen Normale übergehen, und mit hinreichender Annäherung können wir annehmen, dafs sie während dieses Überganges Wärme weder aufnehmen noch abgeben, indem wir von der Wirkung der Strahlung absehen. Unter dieser Voraussetzung ergeben die hydrodynamischen Bewegungsgleichungen, dafs Druck, Temperatur, Dichtigkeit und Geschwindigkeit des Dampfes konstant sein müssen während des ganzen Überganges von der einen Oberfläche zur anderen, gleichgültig, welches die Entfernung derselben. Daraus ergiebt sich, dafs wir den genannten Vorgang vollständig kennen, wenn wir die folgenden Gröfsen anzugeben vermögen:

1. Die Temperaturen T_1 und T_2 der beiden Oberflächen.
2. Die Temperatur T, den Druck p und die Dichte d

[1]) Dafs sehr grofse Fehler immerhin möglich waren, erkennt man, wenn man diejenigen berechnet, welche entstehen mufsten, wenn die Wärmezufuhr zur Oberfläche nur durch Leitung stattfand.

Digitized by Google

des übergehenden Dampfes. Die Temperatur mufs gemessen gedacht werden mittels eines Thermometers, welches sich mit dem Dampfe mit gleicher Geschwindigkeit fortbewegt, der Druck p ist ebenso mittels eines mit dem Dampfe bewegten Manometers gemessen oder als bestimmt aus der Zustandsgleichung des Dampfes zu denken. Als letztere können wir angenähert die Gleichung des vollkommenen Gaszustandes annehmen, also setzen $RT = p/d$.

3. Die Geschwindigkeit u und die Gewichtsmenge m, welche in der Zeiteinheit von der Flächeneinheit der einen Oberfläche zur anderen übergeht. Offenbar ist $m = ud$.

4. Den Druck P, welchen der Dampf auf die Flüssigkeitsoberflächen ausübt. Derselbe ist notwendigerweise gleich für die beiden Oberflächen und verschieden von dem Drucke p des Dampfes in sich. Wir können aber P berechnen, wenn uns die übrigen genannten Gröfsen gegeben sind. Denken wir uns nämlich die Menge m auf der Einheit der Fläche ausgebreitet, auf der einen Seite derselben den Druck P, auf der anderen den Druck p ruhend und nun ihre Temperatur konstant auf T_1 erhalten, so wird sie genau so verdunsten, wie vorher, nach der Zeiteinheit wird sie daher völlig in Dampf verwandelt sein, den Raum u einnehmen und die Geschwindigeit u erlangt haben. Die lebendige Kraft ihrer sichtbaren Bewegung ist daher $\frac{1}{2}mu^2/g$, und diese ist erlangt, indem der Schwerpunkt unter dem Einflusse der Kraft $P-p$ den Weg $\frac{1}{2}u$ zurücklegte, indem also äufsere Kräfte die Arbeit $\frac{1}{2}(P-p)u$ leisteten. Hieraus folgt die Gleichung $P - p = mu/g$, oder in Verbindung mit der Gleichung unter (3): $m^2 = gd(P - p)$.

Das Problem, welches uns die Verdunstung stellt, besteht nun darin, die Beziehungen zwischen diesen Gröfsen für alle zulässigen Werte derselben aufzufinden. Von den acht Gröfsen T_1, T_2, T, p, d, u, m, P sind offenbar zwei, zunächst T_1 und T_2, dann aber auch irgend zwei andere, unabhängige Variabele, die übrigen sechs sind mit diesen durch sechs Gleichungen verbunden, drei Gleichungen haben wir von vornherein angegeben, sonach erfordert die vollständige Auflösung noch die Auffindung weiterer drei Gleichungen aus der Theorie oder der Erfahrung. Wählen wir aber, wie in den Versuchen, T_1 und P als unabhängige Variabelen und beschränken unsere

Digitized by Google

Aufmerksamkeit auf die Verdunstung im engeren Sinne, so interessiert uns T_2 nicht, und es bleibt als Aufgabe die Darstellung zweier der Gröfsen T, p, d, u, m als Funktionen von T_1 und P. Diese zu bestimmenden Funktionen beziehen sich dann aber nicht allein auf den Fall, dafs die Verdunstung zwischen parallelen Wänden stattfindet, sondern sie gelten für jeden Dampf, welcher von einem ebenen Flüssigkeitselemente von der Temperatur T_1 aufsteigt und auf dasselbe den Druck P ausübt. Denn wir können uns jede solche Verdunstung auch in der Weise vorgenommen denken, dafs wir auf der Oberfläche von der Temperatur T_1 einen Kolben ruhen lassen und diesen von einem bestimmten Augenblicke an mit der Geschwindigkeit u von der Oberfläche entfernen; das Resultat dieses Versuches mufs ein eindeutig durch T_1 und u bestimmtes sein, ein mögliches Resultat aber ist uns durch die beiden soeben erwähnten Funktionen gegeben, und dieses mufs daher auch das einzig mögliche sein.

Hiernach sind die auf ein verdunstendes Oberflächenelement bezüglichen Gröfsen vollständig bestimmt durch zwei von ihnen, und es ist also die Voraussetzung, welche den Versuchen zu Grunde lag, gerechtfertigt; andererseits zeigen unsere Betrachtungen, dafs diese Versuche, auch wenn sie erfolgreich gewesen wären, das Problem nicht erschöpft haben würden.

Für die in Rede stehenden Gröfsen können wir Grenzen aufstellen, wenn wir von je zwei Aussagen Gebrauch machen, deren Richtigkeit durch allgemeine Erfahrung mindestens äufserst wahrscheinlich gemacht wird. Es sind die folgenden: 1. Erniedrigen wir die Temperatur einer Flüssigkeitsoberfläche von mehreren, welche sich in demselben Raume befinden, während die Temperaturen der übrigen die ursprünglichen bleiben, so kann der mittlere Druck auf diese Oberflächen hierdurch nur abnehmen, nicht zunehmen; 2. der von einer verdunstenden Oberfläche aufsteigende Dampf ist gesättigt oder ungesättigt, jedenfalls nicht übersättigt. Denn derselbe erscheint stets völlig klar, was nicht der Fall sein könnte, wenn er Flüssigkeit im tropfbaren Zustande mit sich führte. Die erste Behauptung sagt aus, dafs $P < p_1$, die zweite, dafs $d < d_p$, wenn wir unter p_1 den Druck des gesättigten Dampfes bei der Temperatur T_1, und unter d_p die Dichte des gesättigten Dampfes

Digitized by Google

vom Drucke p verstehen. Nun ist $m = \sqrt{gd(P-p)}$, also ist $m < \sqrt{gd_p(p_1-p)}$. Die rechte Seite dieser Ungleichung aber wird Null für $p = 0$ und für $p = p_1$ und erreicht zwischen beiden Drucken einen gröfsten Wert, welchen also m für die Oberflächentemperatur T_1 unter keinen Umständen überschreitet. Kann aber trotz hinlänglicher Wärmezufuhr die Verdunstung eine endliche Grenze nicht überschreiten, so kann der Hinderungsgrund nur in der Natur der Flüssigkeit liegen, und es mufs dann notwendigerweise jeder Flüssigkeit ein spez. Verdunstungsvermögen zukommen. Die Existenz eines solchen hat demnach denselben Grad von Wahrscheinlichkeit wie die beiden unserem Schlusse zu Grunde liegenden Voraussetzungen. Ich habe die aus obiger Gleichung folgende Grenze für m berechnet, indem ich für den Dampf das GAY-LUSSAC-MARIOTTE'sche Gesetz als gültig annahm und für die Beziehung zwischen Druck und Temperatur des gesättigten Dampfes die folgende setzte: $\log p = 10{,}59271 - 0{,}847 \log T - 3342/T$, deren Zulässigkeit ich besonders nachweisen werde.[1]) Indem ich die erhaltenen Gröfsen m durch das spez. Gewicht des Quecksilbers dividierte, erhielt ich Werte für die Höhe der Flüssigkeitsschicht, welche in der Zeiteinheit von einer Oberfläche von gegebener Temperatur höchstens abdunsten kann.

$T =$	100	110	120	130	140	150	160	170	180	°C.
$h <$	0,70	1,11	1,86	3,01	4,50	6,73	9,82	14,31	20,42	mm min
$u <$	2110	2192	2294	2400	2522	2668	2823	2980	3145	m sec.
$P >$	0,046	0,07	0,09	0,14	0,20	0,27	0,38	0,53	0,71	mm
$d/d_1 >$	0,0034	32	30	28	26	24	22	20	18	
$h >$	0,08	0,13	0,21	0,32	0,47	0,65	0,88	1,21	1,67	mm min
$u >$	7,5	7,4	7,3	7,1	6,9	6,8	6,6	6,5	6,3	m sec.
$(P-p)/p_1 >$	0,0034	32	30	28	26	24	22	20	18	

Diese Werte sind, gerechnet in mm/minut. in der zweiten Zeile der eingeschobenen Tabelle angegeben, sie sind etwa zehnmal gröfser, als die gröfsten Werte, welche bei den entsprechenden Temperaturen beobachtet wurden. Letztere sind in der sechsten Zeile aufgeführt als untere Grenzen; untere Grenzen sind diese Werte nicht für die Verdunstung allgemein,

[1]) [Siehe No. 9, S. 220.]

Digitized by Google

da ja dieselbe sehr wohl Null sein kann, sondern sie sind untere Grenzen für die gröfstmögliche Verdunstungsgeschwindigkeit. Ebenfalls auf den Fall, dafs die Verdunstung ihren gröfsten Wert erreicht hat, beziehen sich die übrigen in der Tabelle angegebenen Grenzen; die in Zeile 3, 4 und 5 angegebenen aber gelten auch wohl allgemein, da man annehmen kann, dafs das Maximum von u und das Minimum von P und d gleichzeitig mit dem Maximum von m eintritt. Was die Ableitung dieser Grenzen anlangt, so hat man zunächst $u=(P-p)/mg=m/d$, da nun $m>m_{\min}$, $P-p<p_1$, $d<d_1$ ist, so folgt $p/m_{\min}>u>m_{\min}/d_1$; ferner ist $P=p+m^2/d$, also da $m>m_{\min}$ und $d<d_p$, so folgt $P>p+m^2{}_{\min}/d_p$, der Ausdruck rechter Hand aber hat einen Minimalwert, da er unendlich wird für $p=0$ und für $p=\infty$, dieser Minimalwert ist der in der Tabelle gegebene. Endlich ist $d=m^2/(P-p)$ und $P-p=m^2/d$, also folgt sowohl $d/d_1>m^2{}_{\min}/d_1p_1$ als auch $(P-p)/p_1>m^2{}_{\min}/d_1p_1$.

Um den Sinn der Tabelle klarer zu legen, führe ich an, dafs dieselbe beispielsweise behauptet: Durch keine Mittel können wir bewirken, dafs von einer Quecksilberoberfläche von 100° C. eine Schicht von mehr als 0,7 mm in der Minute abdunste, dafs der Dampf mit einer gröfseren Geschwindigkeit als 2110 m/sec von der Oberfläche ausströme, dafs der Druck auf die Oberfläche kleiner als 4 bis 5 Hundertstel Millimeter werde, oder dafs die Dichte des abströmenden Dampfes weniger als $^1/_{300}$ der Dichte des gesättigten Dampfes betrage; auf der anderen Seite können wir jedenfalls bewirken, dafs mehr als 0,08 mm/min abdunste, dafs die Geschwindigkeit des Dampfes gröfser als 7,3 m/sec werde, und dafs der Druck des abziehenden Dampfes sich vom Drucke des gesättigten Dampfes um mehr als $^1/_{300}$ der Gröfse des letzteren unterscheide.

Zum Schlusse bemerke ich noch, dafs die Existenz einer begrenzten, jeder Flüssigkeit eigentümlichen Verdunstungsgeschwindigkeit auch den Anschauungen der kinetischen Gastheorie entspricht, und dafs man auch auf Grund dieser Anschauung eine ziemlich sichere obere Grenze für die genannte Geschwindigkeit aufstellen kann. Seien T, p und d jetzt Temperatur, Druck und Dichte des gesättigten Dampfes, dann ist $m=\sqrt{pdg/2\pi}$ diejenige Gewichtsmenge, welche in der Zeit-

Digitized by Google

einheit die Flächeneinheit einer den Dampf begrenzenden festen Oberfläche trifft. Nahezu die gleiche Menge aber wird in sehr dünnem Dampfe auch die begrenzende Flüssigkeitsfläche treffen, da die Moleküle in ihrem mittleren Abstande von der Oberfläche dem Einflusse der letzteren entzogen sein werden. Da nun die Menge des gesättigten Dampfes weder zunimmt noch abnimmt, so können wir schliefsen, dafs die gleiche Menge von der Flüssigkeit in den Dampf ausgeworfen wird. Diese von der Flüssigkeit ausgegebene Menge aber wird nahezu unabhängig sein von der eingenommenen, es tritt also Abnahme der Flüssigkeit, d. h. Verdunstung dadurch ein, dafs aus dem Dampfe aus irgend welchen Gründen eine kleinere Gewichtsmenge als die genannte zur Flüssigkeit zurückkehrt und in dem extremen Falle, dafs gar keine Moleküle der Flüssigkeit zurückgegeben werden, mufs die letztere in der Zeiteinheit von der Flächeneinheit die obige Menge verlieren. Diese Menge ist also eine obere Grenze der Verdunstungsgeschwindigkeit; dieselbe ist etwas enger als die früher ermittelte, für Quecksilber ergiebt die Rechnung bei 100° diese Grenze zu 0,54 mm/min, während wir aus unseren früheren Voraussetzungen nur folgern konnten, dafs die Verdunstungsgeschwindigkeit kleiner als 0,70 mm/min sein müsse. Ähnliche Schlüsse lassen sich auf die Energie anwenden, welche von einer verdunstenden Oberfläche höchstens ausgehen kann, es zeigt sich so, dafs die Geschwindigkeit des abströmenden Dampfes niemals gröfser sein kann, als die mittlere Molekulargeschwindigkeit des der Oberflächentemperatur entsprechenden gesättigten Dampfes, also beispielsweise für Quecksilber und eine Temperatur von 100° nicht gröfser als 215 m/sec. Da endlich der Druck eines gesättigten Dampfes auf seine Flüssigkeit zur Hälfte herrührt aus dem Stofse der in die Flüssigkeit eintretenden, zur Hälfte aus dem Rückstofse der die Oberfläche verlassenden Moleküle, die Zahl und mittlere Geschwindigkeit der letzteren aber nahezu die ursprüngliche bleibt, so ist zu schliefsen, dafs der Druck auf eine verdunstende Oberfläche nicht wesentlich kleiner als die Hälfte des Sättigungsdruckes werden könne.

Weiter als bis zur Aufstellung von Grenzwerten lassen sich diese Überlegungen aber nicht benutzen, wenn man nicht Hypothesen von sehr zweifelhaftem Werte zu Hilfe nehmen will.

Digitized by Google

9. Über den Druck des gesättigten Quecksilberdampfes.

Aus WIEDEMANN's Annalen der Physik und Chemie, Bd. 17, S. 193—200, 1882.

Die folgenden Bestimmungen des Druckes, welchen der gesättigte Quecksilberdampf ausübt, wurden aus Anlafs und im Verlaufe der soeben beschriebenen Versuche[1]) über die Verdunstung angestellt. Bei der Berechnung der letzteren benutzte ich anfangs die von REGNAULT angegebenen Zahlen, aber dieselben pafsten offenbar nicht in den Zusammenhang. Trug ich nämlich die Resultate der nach der zweiten Methode[2]) ausgeführten Versuche in der Weise auf, dafs ich für eine bestimmte Temperatur der Oberfläche die in der Zeiteinheit abdunstenden Mengen als Abscissen, die zugehörigen Drucke als Ordinaten nahm, so erhielt ich Punktreihen, welche geraden Linien sehr nahe lagen, verlängerte ich nun diese Geraden nur sehr wenig über das beobachtete Intervall hinaus, so fand ich diejenigen Drucke, welche der Verdunstung Null entsprachen, und also die Sättigungsdrucke darstellen mufsten. Die so gefundenen Zahlen waren sämtlich kleiner als die REGNAULT'schen. Dafs die Erklärung dieses Umstandes in Fehlern der letzteren zu suchen sei, wurde mir wahrscheinlich durch die Versuche Herrn HAGEN's[3]), die Werte selbst aber, welche derselbe gefunden, lagen ebenfalls abseits der erwähnten Geraden. Herr HAGEN vermutete selber, dafs seine Werte für Temperaturen über 100°, um welche Temperaturen es sich vorzüglich handelte, zu klein seien, so war ich auf eigene Bestimmungen angewiesen.

[1]) [Siehe No. 8 S. 199.]
[2]) Siehe S. 205.
[3]) Siehe WIEDEMANN's Ann. Bd. 16, S. 610, 1882.

Digitized by Google

Für diese Bestimmungen wurde zunächst im Anschlusse an die Verdunstungsversuche das U-förmige Manometer benutzt, welches aus dem in Fig. 21 (S. 204) dargestellten Verdunstungsgefäfse entsteht, wenn die Vorlage und das Verbindungsrohr fortgelassen, und dadurch die Verdunstung aufgehoben wird. Aus beiden Schenkeln des Gefäfses war durch die vereinte Wirkung des Auskochens und der Quecksilberpumpe alle Luft entfernt. Die Temperatur des erhitzten Schenkels ergab das inmitten des Quecksilbers befindliche Thermometer, durch Kalibrierung desselben und Umrechnung wurde dieselbe auf die Angaben des Luftthermometers reduziert. Die Bestimmung des Druckes setzte sich zusammen aus der direkten Ablesung des Niveauunterschiedes in beiden Schenkeln und der Ermittelung einer Korrektion von beträchtlicher Gröfse. Der hauptsächlichste Teil der letzteren rührte her von der Ausdehnung des Quecksilbers durch die Temperatur, dieser Teil wurde berechnet, indem auf die durch das Wärmeleitungsgesetz bedingte Temperaturverteilung in dem Verbindungsrohre beider Schenkel Rücksicht genommen wurde, und die zur Erkenntnis dieser Verteilung notwendigen Konstanten durch besondere Versuche ermittelt wurden. Ein kleinerer Teil der Korrektion hatte seinen Ursprung in der verschiedenen Gröfse der Kapillardepression in den beiden Schenkeln; diesen Teil glaubte ich als gleich für alle vorkommenden Temperaturen ansehen zu können, und wurde derselbe daher einfach durch den Niveauunterschied bei gleicher Temperatur der Schenkel gemessen. Von den nach dieser Methode gefundenen Drucken sind nur diejenigen, welche sich auf Temperaturen über 150° bezogen, für die schliefsliche Rechnung beibehalten worden, diese wurden zu drei Mittelwerten zusammengezogen, welche in die gleich folgende Tabelle aufgenommen und durch einen Asteriscus kenntlich gemacht sind. Die Beobachtungen unter 150° wurden verworfen aus dem Grunde, weil hier die Korrektionen viel gröfser als die zu beobachtenden Gröfsen waren, und daher die Resultate unsicher wurden. Beispielsweise wurde bei 137,4° der Druck zu 1,91 mm gefunden, aber dieser Wert setzt sich zusammen aus einer Korrektion von + 2,49 mm und einer Beobachtung von — 0,58 mm. Nimmt man Rücksicht auf diese ungünstigen Verhältnisse, so stimmten die verworfenen

Digitized by Google

Beobachtungen hinreichend mit den später als richtig anzugebenden Werten, sie wichen nie mehr als 0,2 bis 0,3 mm von denselben ab und lagen zwischen jenen und den REGNAULT'schen, derart aber, daſs sie von letzteren doppelt bis dreimal so weit als von ersteren abstanden.

Für die Bestimmung der kleineren Drucke wurde die folgende weit geeignetere Methode verwendet. Die offenen Schenkel zweier Manometer *A* und *B* (Fig. 23) kommunizieren mit einander, dieselben enthalten Luft von geringem Drucke, etwa von 10 bis 20 mm; die geschlossenen Schenkel sind völlig luftfrei. Das eine der Manometer *A* wurde im Wasserbade auf Zimmertemperatur gehalten, das andere *B* in einem Heizkasten von dickem Guſseisen im Paraffinbade erhitzt, jedoch nur so weit, daſs das Quecksilberniveau des geschlossenen Schenkels nicht unter das des offenen sank. Dann war also der Druck des Quecksilberdampfes kleiner als der jedesmalige Druck der Luft im offenen Schenkel, eine Verdunstung, auſser durch Diffusion, konnte nicht stattfinden, es war also auch der Druck in den offenen Schenkeln beider Manometer gleich,

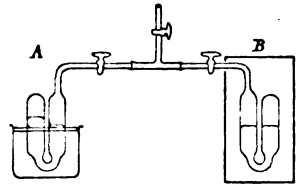


Fig. 23.

und die Differenz der auf Quecksilber von 0° reduzierten Ablesungen der beiden Manometer gab die Differenz des Sättigungsdruckes für die Temperatur des heiſsen und des kalten Manometers. Der Druck des Quecksilberdampfes in letzterem aber kann nach den Resultaten dieser Untersuchung gleich Null gesetzt werden. Die Temperatur des Bades wurde an einem sehr guten GEISSLER'schen Thermometer abgelesen, welches ich zur Reduktion seiner Angaben direkt mit einem JOLLY'schen Luftthermometer verglich. Die Niveauunterschiede wurden mittels des Okularschraubenmikrometers des zum Kathetometer gehörigen Mikroskopes gemessen. Ich bemerke noch, daſs die lichte Weite der Manometerrohre 20 mm betrug, daſs die Einstellung auf das wahre Niveau durch hinter den Rohren angebrachte Drahtgitter erleichtert wurde, deren Drähte unter 45° gegen den Horizont geneigt waren, daſs der Druck der Luft in den offenen Schenkeln variiert wurde, endlich,

Digitized by Google

dafs ich mich von der Abwesenheit der Luft in den geschlossenen Schenkeln nach jeder Erhitzung von neuem überzeugte, indem ich unter dem Einflusse äufserer elektrischer Spannungen Entladungen in denselben erzeugte; die Röhren zeigten dann das grüne Phosphorescenzlicht und nur dieses, wonach der Druck der Luft in ihnen nicht über ein bis zwei Hundertstel Millimeter betragen konnte. Das Resultat der Versuche war das folgende: Bis zu 50° konnte ich keinen Druck wahrnehmen, welcher aufserhalb der Unsicherheit einer Einzelbestimmung (0,02 mm) lag, bei 60° erhielt ich etwa 0,03, bei 70° 0,05, bei 80° 0,09 mm Druck, von hier ab wurden die Fehler klein gegen die ganzen Werte, von 120 bis 130° ab konnten überhaupt die beobachteten Drucke als richtig angesehen werden, da ihre Fehler verschwanden gegen diejenigen, welche aus der Temperaturbestimmung resultierten. Es wurden dann Gruppen von acht bis zwölf nahe gelegenen Einzelbeobachtungen zusammengefafst, indem einfach der mittleren Temperatur der mittlere Druck zugeordnet wurde; die sechs so gewonnenen Hauptwerte, zusammen mit den drei nach der ersten Methode bestimmten, sind durch die ersten beiden Kolumnen der folgenden Tabelle wiedergegeben. Der Inhalt dieser Kolumnen bildet die Unterlage der Rechnung.

t	p	Δp	Δt	t	p	Δp	Δt
89,4	0,16	0,00	0,0	*184,7	11,04	+0,15	+0,4
117,0	0,71	+0,04	+1,1	190,4	12,89	−0,37	−0,8
154,2	3,49	+0,01	+0,1	203,0	20,35	+0,23	+0,3
*165,8	5,52	+0,04	+0,2	*206,9	22,58	−0,20	−0,3
177,4	8,20	−0,22	−0,7				

Was nun die Berechnung dieser Versuche anlangt, so habe ich versucht, auf dieselben eine zu gleichem Zwecke noch nicht benutzte Formel[1]) anzuwenden, welche theoretische Be-

[1]) Eine analoge und auf Grund wesentlich gleicher Schlüsse abgeleitete Formel ist indessen von Hrn. Kolaček (Wied. Ann. 15, S. 38, 1882) benutzt worden, um den Druck des vom Sättigungszustande entfernten Wasserdampfes auf Salzlösungen darzustellen. In jenem Falle ist die theoretische Berechtigung der Formel sogar weit gröfser als in dem unserigen, in welchem die Anwendbarkeit derselben erst durch die Ver-

Digitized by Google

rechtigung besitzt und richtig sein muſs mit derselben Annäherung, mit welcher der gesättigte Dampf dem für den sehr verdünnten Dampf gültigen GAY-LUSSAC-MARIOTTE'schen Gesetze gehorcht. Unter der Voraussetzung der Gültigkeit dieses Gesetzes besitzt der Dampf eine konstante spezifische Wärme bei konstantem Volumen, es sei dieselbe c, es sei ferner s die spezifische Wärme der Flüssigkeit und ϱ_T die innere Verdampfungswärme für die absolute Tempertur T. Dann ist unter der gemachten Voraussetzung notwendigerweise $\varrho_T = \text{const} - (s-c)T$. Man beweist diese Behauptung, indem man sich eine Flüssigkeitsmenge von der Temperatur T auf eine beliebige andere Temperatur gebracht, hier ohne äuſsere Arbeit in Dampf verwandelt, den Dampf, immer ohne äuſsere Arbeit, auf die Temperatur T zurückgebracht und niedergeschlagen denkt; die Flüssigkeit kann bei diesem Prozesse Wärme weder aufgenommen noch abgegeben haben. Andererseits hat man nach den Sätzen der mechanischen Wärmetheorie $\varrho_T = Au(Tdp/dT - p)$, worin p den Druck des gesättigten Dampfes bezeichnet, und unter u das spezifische Volumen desselben verstanden, also $u = RT/p$ gesetzt werden kann. Eliminiert man aus den drei angegebenen Gleichungen ϱ_T und u, so erhält man eine Differentialgleichung für die Kurve der Dampfspannung, die das folgende Integral ergiebt:

$$p = k_1 T^{1 - \frac{s-c}{AR}} e^{-\frac{k_2}{T}} .$$

Für Quecksilber ist s bekannt. Aus eigenen Versuchen und

---

gleichung mit der Erfahrung erwiesen wird. Zu der Arbeit des Hrn. KOLÁČEK möchte ich mir die Anmerkung erlauben, daſs alle experimentellen Daten vorhanden sind, um mittels obiger Formel die Spannkraft des Dampfes über dem Eise und über überkältetem Wasser bis zum absoluten Nullpunkte zu verfolgen, die Berechtigung einer solchen Anwendung wird dargethan durch den (zu führenden) Nachweis, daſs die erhaltene Formel die Spannkraft des Dampfes in einem beträchtlichen Intervalle oberhalb 0° mit guter Annäherung wiedergiebt. Erweist sich nämlich die Formel als zulässig innerhalb eines gewissen Temperaturintervalles, so wird sie auch zulässig sein für alle Temperaturen unterhalb dieses Intervalles, da ein gesättigter Dampf mit abnehmender Temperatur sich dem vollkommenen Gaszustande mehr und mehr nähert.

Digitized by Google

einer Angabe REGNAULT's findet Hr. WINKELMANN[1]) eine kleine Abnahme dieser Gröfse für wachsende Temperaturen und als Mittelwert zwischen 0° und 100° $s = 0{,}0330$. Versuche, welche Hr. Dr. RONKAR aus Lüttich im hiesigen physikalischen Institute[2]) angestellt hat, haben demselben gezeigt, dafs die Änderung zwischen $-20°$ und $+200°$ jedenfalls aufserordentlich klein ist und haben im Mittel $s = 0{,}0332$ ergeben; diesen Wert führe ich in die Rechnung ein. Die Gröfse c ist dadurch bestimmt, dafs nach den Resultaten KUNDT's und WARBURG's das Verhältnis der spezifischen Wärmen für Quecksilberdampf $= \frac{5}{3}$ ist, und wird gleich 0,0149 gefunden. Hieraus ergiebt sich der Exponent von T zu $-0{,}847$. Die beiden übrigen Konstanten sind aus den Beobachtungen zu bestimmen, es genügen hierzu zwei derselben; wählt man etwa die Beobachtung bei 206° der ersten Reihe und die bei 154° der zweiten, so erhält man schon eine Formel, die sämtliche Beobachtungen hinreichend wiedergiebt. Die so bestimmten Konstanten sind durch eine Ausgleichsrechnung zu verbessern; dabei ist es rationell, die Drucke als richtig beobachtet anzunehmen und also die Summe der Quadrate der Temperaturfehler zu einem Minimum zu machen; auf diesem Wege habe ich gefunden:

$$\log k_1 = 10{,}59271 \quad , \qquad \log k_2 = 3{,}88623 \quad .$$

Führt man diese Konstanten in die Formel ein und giebt derselben eine für die Rechnung bequemere Gestalt, so wird dieselbe:

$$\log p = 10{,}59271 - 0{,}847 \log T - 3342/T \; .$$

Um die Vergleichung der mittels dieser Formel berechneten Werte mit den Beobachtungen zu ermöglichen, sind obiger Tabelle die dritte und vierte Kolumne zugefügt, die dritte giebt die Fehler, welche in den Druckmessungen stattgefunden haben müssen, wenn die Temperaturen richtig beobachtet sind, die vierte die Fehler, welche man den Temperaturmessungen zumuten mufs, wenn man die Drucke als richtig beobachtet ansehen will. Es zeigt sich, dafs die Formel die Beobachtungen vollständig wiedergiebt, wenn man eine mittlere

[1]) Siehe POGGENDORFF's Ann. Bd. 159, S. 152, 1876.

[2]) [d. i. in dem zu Berlin.]

Digitized by Google

Unsicherheit von 0,02 mm in den Druckmessungen und von 0,6° in den Temperaturmessungen zugiebt; dafs solche Unsicherheiten zugegeben werden müssen, zeigt die Anordnung der Abweichungen. Die Messungen, welche unterhalb 89° vorgenommen wurden, zeigen sich, so weit ein Vergleich möglich ist, vollständig im Einklange mit der Formel. Mit Hilfe der letzteren ist dann die folgende Tabelle berechnet, welche zwischen 0 und 220° den Druck des Dampfes für alle vollen 10 Grade giebt:

t	p	t	p	t	p	t	p
0°	0,00019	60°	0,026	120°	0,779	180°	9,23
10	0,00050	70	0,050	130	1,24	190	13,07
20	0,0013	80	0,093	140	1,93	200	18,25
30	0,0029	90	0,165	150	2,93	210	25,12
40	0,0063	100	0,285	160	4,38	220	34,90
50	0,013	110	0,478	170	6,41		

Zu bemerken ist noch, dafs $p = 0$ wird für $t = -273°$, sowie dafs die Formel für die innere latente Wärme des Dampfes den Wert $\varrho_T = 76{,}15 - 0{,}0183\,T$ ergiebt. Die oben mitgeteilten Zahlen weichen nicht unbeträchtlich ab, sowohl von den Regnault'schen als von den Hagen'schen, sie sind durchweg kleiner als die Regnault'schen, nähern sich denselben aber mit wachsender Temperatur und fallen nahe bei 220° mit denselben zusammen, sie sind hinwieder gröfser als die Hagen'schen oberhalb 80°, stimmen übrigens zwischen 80 und 100° nahe mit denselben zusammen und sind kleiner als jene unterhalb 80°.

Das Hauptinteresse knüpft sich an den Druck des Dampfes bei gewöhnlicher Lufttemperatur. Nach den Ergebnissen unserer Untersuchung beträgt derselbe weniger als ein Tausendstel Millimeter.[1]) Eine Korrektion wegen dieses Druckes

[1]) Allerdings ist dieser Wert nur berechnet, während beide früheren Beobachter bei Lufttemperatur Beobachtungen angestellt und übereinstimmend einen Druck von einigen Hundertstel Millimetern wahrzunehmen geglaubt haben. Indessen erscheint die verwandte Formel hinreichend begründet und auf die einzige in ihr enthaltene Hypothese hinreichend geprüft, um es mit der schwierigen und Täuschungen ausgesetzten Beobachtung so kleiner Gröfsen aufnehmen zu können. Hinzu kommt, dafs

Digitized by Google

an Barometer- und Manometerablesungen wäre also nicht anzubringen. Die Kleinheit des in Rede stehenden Druckes und nicht eine besondere Eigenschaft des Quecksilbers dürfte auch der Grund für den verschwindenden Einfluſs sein, welchen der stets vorhandene Quecksilberdampf auf die Entladungserscheinungen in Geissler'schen Röhren ausübt.

---

ch selber bis zu 50° keinen merklichen Druck auffinden konnte, während 0,10 mm, wie Regnault, oder selbst 0,04 mm, wie Hagen angiebt, der Beobachtung nicht hätten entgehen können.

Digitized by Google

10. Über die kontinuierlichen Ströme, welche die fluterregende Wirkung der Gestirne im Meere veranlassen muß.

Aus den Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Sitzung vom 5. Januar 1883.

Infolge der Reibung des Wassers der Meere in sich und am Grunde erscheint das Flutellipsoid, dessen Axe ohne das Vorhandensein der Reibung die Richtung gegen das fluterregende Gestirn oder eine zu dieser senkrechte Richtung besitzen würde, gegen die genannten Lagen um einen gewissen Winkel gedreht. Die anziehende Kraft des fluterregenden Gestirnes auf die Kuppen des Flutellipsoides giebt daher Anlafs zur Entstehung eines Kräftepaares, welches der Rotation der Erde entgegenwirkt. Die Arbeit, welche die stets rotierende Erde gegen dies Kräftepaar leistet, ist diejenige Energie, auf deren Kosten trotz der Reibung die Flut- und Ebbebewegung stetig unterhalten wird. Die Übertragung des zunächst an der Flüssigkeit angreifenden Kräftepaares an den festen Erdkern wäre indes unmöglich, wenn die Bewegung der Flüssigkeit gegen den Kern eine rein oscillierende wäre und das mittlere Meeresniveau mit dem mittleren Potentialniveau zusammenfiele; sie wird nur möglich dadurch, dafs die Flüssigkeitsmasse beständig hinter dem rotierenden Kerne ein wenig zurückbleibt, oder dadurch, dafs eine beständige Aufstauung über das Potentialniveau an den westlichen Küsten der Meere stattfindet, oder dadurch, dafs eine Kombination beider Vorgänge eintritt. Ich habe versucht, aus der Theorie der Bewegung reibender Flüssigkeiten eine Schätzung der Art und Gröfsenordnung der hier erregten Strömungen zu erhalten; das folgende ist das Resultat dieser Betrachtung. Es sei ein geschlossener Kanal

Digitized by Google

gegeben, es sei l die laufende Länge, L die ganze Länge desselben, h sei seine Tiefe, t die Zeit und T die Dauer des Tages. ζ bedeute die Abweichung des Wassers vom mittleren Niveau und es sei

$$\zeta = \zeta_0 \cos 4\pi \left(\frac{l}{L} - \frac{t}{T} \right)$$

eine halbtägige Flutwelle, welche den Kanal unter dem Einflusse eines Gestirnes durchlaufen würde, wenn auf denselben die Gleichgewichtstheorie in Anwendung gebracht werden könnte. Dann ist die wirklich stattfindende Flutwelle gegeben durch die Gleichung:

$$\zeta = \zeta_1 \cos 4\pi \left(\frac{l}{L} - \frac{t}{T} - \varepsilon \right) \quad ,$$

wo

$$\operatorname{tg} 4\pi\varepsilon = \frac{kAL}{2\pi\mu h^2 (gh - A^2)}$$

und

$$\zeta_1 = \frac{2\pi g \mu h^3}{kAL} \zeta_0 \sin 4\pi\varepsilon$$

ist. Hierin bedeutet k die Reibungskonstante des Wassers,

$$A = \frac{L}{T}$$

die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle, μ die Dichtigkeit des Wassers und g die Beschleunigung durch die Schwere. In der Rechnung sind Gröfsen zweiter Ordnung vernachlässigt, unter anderem ist in der freien Oberfläche die tangentiale Druckkomponente gleich Null gesetzt für das mittlere Niveau, während sie doch Null ist für das wahre Niveau. Man findet, dafs dieser Fehler zweiter Ordnung ausgeglichen wird, wenn man in der Oberfläche in der Richtung der fortschreitenden Welle eine Zugkraft τ angreifend denkt, deren Gröfse gleich dem Mittelwerte von $\mu\zeta X$ genommen über die Zeit ist, wenn X die Gravitationskomponente in Richtung des Kanales bezeichnet. Für die oben betrachtete Flutwelle wird

$$\tau = \frac{4\pi^2 \mu^2 g^2 \zeta_0^2 h^3}{kAL^2} \sin^2 4\pi\varepsilon = \frac{Ak}{h^3} \zeta_1^2 \quad .$$

Digitized by Google

Diese Zugkraft entspricht einer Strömung, welche den Kanal in gleicher Richtung wie die Flutwelle durchfliefst, die vom Grunde bis zur Oberfläche gleichförmig zunimmt und an der Oberfläche die Geschwindigkeit

$$u = \frac{4\pi^2 h^4 g^2 \mu^2}{k^2 A L^2} \zeta_0^2 \sin^2 4\pi\varepsilon = A \frac{\zeta_1^2}{h^2}$$

besitzt.

Wendet man dies auf die Erde an, so erkennt man, dafs im allgemeinen der fortschreitenden Flutwelle eine Strömung in gleichem Sinne folgen mufs; für einen in Richtung eines Breitengrades um die Erde gelegten Kanal wäre dies eine überall von Ost nach West gerichtete Strömung, für einen beliebig gelegenen Kanal eine solche Strömung, welche in der Nähe des Äquators von Ost nach West, in dem vom Äquator abgelegenen Teile entgegengesetzt gerichtet ist. Die Strömung ist im allgemeinen eine geringe, sie kann aber sehr merkliche Werte annehmen, wenn die Länge und Tiefe des Kanales solche sind, dafs die Dauer der Eigenschwingung des Wassers in ihm gleich der Dauer des Tages ist, wo dann ohne Berücksichtigung der Reibung Ebbe und Flut unendliche Werte annehmen würden. Zur Erlangung numerischer Werte sind die angegebenen Formeln nicht geeignet, da die benutzten Differentialgleichungen nicht auf die Bewegung tiefer Gewässer anwendbar sind; in der That, setzt man für die Reibungskonstante denjenigen sehr kleinen Wert, welcher sich aus der Beobachtung an Kapillarröhren ergiebt, so kommt man zu Fluten von widersinniger Höhe und Strömungen von widersinniger Heftigkeit, andererseits erhält man nur Strömungen von etwa 100 m in der Stunde, wenn man die Formel

$$u = A \frac{\zeta_1^2}{h^2}$$

benutzt und für ζ_1 Werte setzt, welche den thatsächlich beobachteten Fluten entsprechen.

A posteriori kann man aus der annähernd bekannten Gröfse der Flutreibung einen Schlufs ziehen auf die Gröfsenordnung der Ströme, welche die Gravitation veranlafst. Die Erde bleibt in einem Jahrhundert 22 Sekunden hinter einem

Digitized by Google

richtigen Chronometer zurück.[1]) Um eine solche Verzögerung zu bewirken, mufs an ihrem Äquator beständig eine Kraft angreifen von Osten gegen Westen gerichtet, von der Gröfse von 530 Millionen Kilogramm. Denken wir uns diese Kraft verteilt auf ein System von Küsten, welche parallel dem Meridian laufen, das Meer im Westen begrenzen und deren Gesamtlänge gleich einem Erdquadranten ist, so entfällt ein Druck von 53 Kilogramm auf jeden Meter dieser Küstenlänge, und um diesen Druck hervorzurufen, mufs sich das Meer an diesen westlichen Küsten um 0,3 m über die Niveaufläche des Potentiales erheben, mit welcher es an den östlichen Küsten zusammenfällt. Sofern also die angegebene Verlangsamung der Erdrotation überhaupt ihren Ursprung in der Flutreibung hat, können wir schliefsen, dafs infolge der fluterregenden Wirkung der Gestirne Abweichungen des mittleren Meeresniveaus vom mittleren Potentialniveau von $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{3}$ m verursacht werden und Strömungen von solcher Ordnung, wie die genannten Niveaudifferenzen sie erregen können. Ohne dafs wir die Gröfse dieser Strömungen anzugeben vermöchten, können wir schliefsen, dafs sie sehr wohl an Stärke denjenigen ähnlich sein können, welche ihren Ursprung in Temperaturdifferenzen haben. Denn die Temperaturunterschiede können wohl Abweichungen des Meeresniveaus vom Potentialniveau bis zu mehreren Metern veranlassen, aber nur ein kleiner Teil dieser Gröfse wird überhaupt zu Strömungen Anlafs geben, und nur ein kleiner Teil dieses Teiles zu Strömungen, welche von Ost nach West gerichtet sind.

[1]) Nach Thomson und Tait, Theor. Phys. § 830.

Digitized by Google

11. Dynamometrische Vorrichtung von geringem Widerstande und verschwindender Selbstinduktion.

Aus der Zeitschrift für Instrumentenkunde, Bd. 3, S. 17—19, 1883.

Das von WILHELM WEBER erfundene Elektrodynamometer leidet in allen Formen, die zum Nachweise halbwegs schwacher Ströme bestimmt sind, an zwei für viele Untersuchungen sehr erheblichen Übelständen, erstens dem grofsen Widerstande, der gewöhnlich mehrere hundert Siemens-Einheiten beträgt, und zweitens dem hohen Werte des Selbstinduktionskoefficienten. Dieser letztere Fehler beschränkt in mancher Hinsicht den Gebrauch des Instrumentes mehr als der erstere, denn er bewirkt, dafs das Dynamometer alternierenden Strömen einen scheinbar vergrösserten Widerstand entgegensetzt und diese Vergrösserung kann bei sehr schnell alternierenden Strömen eine sehr beträchtliche sein. Ist w der Widerstand des Instrumentes, P sein Selbstinduktionskoefficient, T die Periode eines alternierenden Stromes, so verhält sich der scheinbare Widerstand gegenüber diesem Strome zu dem eigentlichen Widerstande w wie $\sqrt{1+P^2\pi^2/T^2w^2} : 1$. Nun kann für das von WILHELM WEBER beschriebene Instrument und die ähnlichen in Gebrauch befindlichen Formen der Koefficient P als von der Ordnung von 1 bis 2 Erdquadranten veranschlagt werden; nehmen wir w zu 200 S.-E. oder angenähert zu 200 Erdquadranten in der Sekunde, so folgt, dafs schon für einen Strom, der 50 mal in der Sekunde seine Richtung ändert, der Widerstand im Verhältnisse von $\sqrt{2} : 1$ vergrösert erscheint; einem Strome aber, welcher 500 000 mal in der Sekunde seine Richtung ändert, würde das Instrument einen Widerstand von 20 000 S.-E. entgegenstellen. Über das Vorhandensein oder Nichtvorhandensein von Strömen, die mehr als 10 000 mal in

Digitized by Google

der Sekunde ihre Richtung ändern, vermag demnach das Dynamometer keinen Aufschluſs zu geben, da seine Einfügung in den Schlieſsungskreis an sich das Zustandekommen solcher Ströme verhindert. Es wird daher unanwendbar beispielsweise dann, wenn es sich um die Entladung Leydener Flaschen in kurzen metallischen Schlieſsungsbögen handelt.

Der Erfolg einer Untersuchung, welche ich anstellte[1]) und bei welcher es auf den Nachweis ungemein schnell alternierender Ströme ankam, war abhängig von dem Besitze eines Instrumentes, welches mit kleinem Widerstande und verschwindender Selbstinduktion doch einige Empfindlichkeit verbände, und ich kam daher auf den Gedanken, die Wärmewirkung des Stromes in dünnen Metalldrähten zum Nachweise ihres Vorhandenseins zu benutzen. Der Versuch glückte viel besser, als irgend zu erwarten war, und ich erlaube mir daher, das benutzte kleine Instrument hier zu beschreiben. Es steht zwar an Empfindlichkeit für gleiche Stromintensitäten weit zurück hinter den üblichen Dynamometern, übertrifft aber ebensoweit diejenigen Apparate gewöhnlicher Konstruktion, welche ihm dem Widerstande nach vergleichbar sind; es hat eine verschwindende Selbstinduktion und wird an Bequemlichkeit der Benutzung von keinem Apparate übertroffen, welcher gleich genaue Messungen zu machen erlaubt.

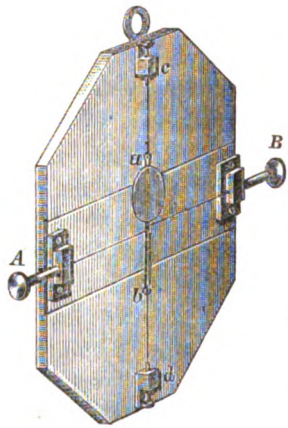


Fig. 24.

Fig. 24 giebt ein Bild des Apparates. Zwischen den Klemmen *A* und *B* ist der Hauptbestandteil, ein sehr dünner Silberdraht von 0,06 mm Durchmesser und 80 mm Länge ausgespannt; derselbe aber läuft nicht geraden Wegs von einer Klemme zur anderen, sondern er ist an dem senkrechten Stahldraht *ab* mit ein wenig Lot befestigt und so um den-

[1]) [Siehe No. 13 S. 242.]

Digitized by Google

selben geschlungen, wie es durch Fig. *b* näher erläutert wird. Der Stahldraht *ab* hat einen Durchmesser von 0,8 mm, er ist möglichst glatt und rund; die Verschlingung des Silberdrahtes kann einfach dadurch erzeugt werden, dafs man denselben zunächst locker spannt und nun den Stahldraht in Richtung des Pfeiles dreht. In einer Lage, in welcher der Silberdraht schon gut gespannt ist, wird *ab* erhalten durch die Torsion, welche er in den dünneren Stahldrähten *ac* und *bd* von 0,1 bis 0,2 mm Durchmesser und 25 mm Länge wachruft. Es ist nun klar, dafs bei jeder Erwärmung des Silberdrahtes sich die Drähte *ac* und *bd* detordieren und also eine Drehung des Drahtes *ab* um seine Längsaxe veranlassen; diese wird mittels eines an der Axe befestigten Spiegels durch ein Fernrohr an einer ca. 2 m entfernten Skale abgelesen. Um zu verhindern, dafs Änderungen der allgemeinen Temperatur gleichfalls Drehungen des Spiegels zur Folge haben, sind die Klemmen *A* und *B* nicht direkt auf der Holzunterlage, sondern auf einem Stücke steifen Messingbleches, selbstredend isoliert von diesem befestigt. Da Messing und Silber sehr nahe die gleiche Ausdehnung besitzen, so ändern Temperaturschwankungen des ganzen Apparates die Ruhelage sehr wenig. Ein Kästchen, welches Luftströmungen abhält, ist in der Figur fortgelassen. Der Apparat kann entweder mit einem Haken zum Aufhängen an der Wand, oder mit einem Fufse versehen werden; Stellschrauben sind überflüssig.

Gesetzt, es werde der Draht *AB* um 1° C. gegen seine Umgebung erwärmt, dann verlängert er sich um 19 Milliontel seiner Länge, also verlängert sich jede seiner Hälften um 760 Milliontel Millimeter; diese Ausdehnung erscheint auf der Skale vergröfsert im Verhältnisse von $2 \times 2000/0{,}4 : 1 = 10\,000 : 1$ und verursacht also eine Verschiebung um 7,6 mm; einer Temperaturerhöhung von $\frac{1}{30}{}^{0}$ C. entspricht daher eine Verschiebung von ca. $\frac{1}{4}$ mm, welche eben noch unzweifelhaft wahrgenommen wird.

Die Beobachtung ergab nun das Folgende:

1. Der Widerstand des Instrumentes beträgt 0,85 S.-E.

2. Das Instrument kann in jeder beliebigen Lage benutzt werden und seine Aufstellung bedarf keiner besonderen Sorgfalt; das Bild der Skale steht völlig ruhig auch an einem Orte,

Digitized by Google

an welchem wegen der Erschütterungen des Bodens ein feines Galvanometer oder Dynamometer in beständiger Bewegung sich befindet. Wird der Spiegel in Schwingungen versetzt, so erfolgen diese so rasch, dafs das Bild der Skale verschwimmt, aber die Luftdämpfung reicht aus, den Spiegel schon nach $\frac{1}{2}$ bis 1 Sekunde zur völligen Ruhe zu bringen.

3. Wird durch den Silberdraht ein Strom von passender Stärke geleitet, so geht das Bild mit einem Rucke auf die neue Ruhelage über und letztere kann nach 1 bis 2 Sekunden abgelesen werden; bei Unterbrechung des Stromes geht das Bild wieder ruckweise in die alte Ruhelage zurück. Sind die Ausschläge grofs, so tritt allerdings Nachwirkung ein, aber diese scheint mehr elastischen als thermischen Ursprunges zu sein und ist nicht gröfser als in allen Instrumenten, in welchen Kräfte durch die Elasticität von Drähten gemessen werden. Nach einer oder höchstens einigen Minuten ist die alte Ruhelage mit aller wünschenswerten Genauigkeit wieder erreicht.

4. Über die Empfindlichkeit des Instrumentes geben die folgenden Zahlen Aufschlufs. Es wurde dasselbe in einen Stromkreis eingeschlossen, welcher aus einem Daniell'schen Elemente und w Siemens-Einheiten gebildet war. Unter a ist in der folgenden Tabelle der erfolgende Ausschlag in Skalenteilen, unter b die Wurzel aus diesem Ausschlage zu verstehen, letztere jedesmal dividiert durch den Gesamtwiderstand der Leitung, welcher aus w S.-E., 0,85 S.-E. für das Dynamometer und 0,77 S.-E. für das Daniell'sche Element gebildet war, und multipliziert mit 1000.

$w =$	100	50	30	20	10	5	3	2
$a =$	0,25	0,9	2,2	4,9	16,9	52,1	106,8	173,8
$b =$	4,94	4,89	4,68	4,77	4,77	4,78	4,77	4,77

Die Zahlen der dritten Reihe sind bis auf die den kleinsten Ausschlägen angehörenden gleich und zeigen, dafs die Ausschläge merklich den Quadraten der Stromstärke proportional sind und dafs das Instrument zu Messungen ganz wohl geeignet ist. Ein Strom von 1 Dan. in 150 bis 100 S.-E. ist eben noch deutlich wahrzunehmen, Ströme von 1 Dan. in 30 S.-E. und — durch Abschaltung — alle stärkeren, können gemessen werden.

Digitized by Google

5. Werden durch das Instrument alternierende Ströme gesandt und wechseln dieselben nicht wenigstens einige hundertmal in der Sekunde ihre Richtung, so tritt ein Übelstand auf, der in der kleinen Schwingungsdauer des Spiegels beruht. Der Draht nimmt nämlich die Wärme so schnell an und giebt dieselbe so schnell wieder ab, dafs der Spiegel in Mitschwingung gerät, indem er jedem einzelnen Impulse folgt. An sich ist dies ein Vorzug; da aber das Auge den Schwingungen nicht zu folgen vermag, so verschwimmt das Bild der Skale, und eine scharfe Ablesung der mittleren Ablenkung ist nicht möglich. Dieser Nachteil wird wesentlich kleiner, wenn man objektive Beobachtung anwendet, wo dann die Skale ruht, und die Mittellage des zitternden Lichtfleckes immer noch recht genau bestimmt werden kann. Übrigens kann auch, ohne dafs die Empfindlichkeit geschädigt würde, der Axe ein solches Trägheitsmoment erteilt werden, dafs die Schwingungsdauer beliebig grofs wird.

Da es schien, als sei die Empfindlichkeit des Instrumentes nur beschränkt durch die Genauigkeit, mit welcher die Drehungen der Axe abgelesen werden konnten, so habe ich eine Reihe von Versuchen gemacht, durch noch stärkere Übertragungen noch kleinere Verlängerungen des Drahtes sichtbar zu machen, teils indem ich an der Axe des beschriebenen Instrumentes Hebel anbrachte, die andere Axen drehten, teils durch ganz andere Anordnungen des gespannten Drahtes. Ich gelangte so dahin, Ausschläge zu erhalten, die zehnmal gröfser waren, als die angegebenen, aber dabei waren immer die Handlichkeit und Sicherheit der Einstellung so sehr vermindert, dafs ich die betreffenden Anordnungen nicht empfehlen möchte. Die beste Art, die Empfindlichkeit zu erhöhen, besteht in dem Versuche, einen noch dünneren Silberdraht zu verwenden, den Durchmesser der Axe *ab* noch weiter zu vermindern und die Länge des Silberdrahtes zu vermehren, da wohl nur selten ein Dynamometer verlangt wird, welches einen so kleinen Widerstand wie das hier beschriebene besitzt.

Geht man etwas näher in die Theorie des Instrumentes ein, indem man die Annahme macht, dafs die vom Drahte unter übrigens gleichen Umständen abgegebene Wärme der Oberfläche desselben proportional, von der Natur des Metalles

Digitized by Google

aber nahezu unabhängig sei, so gelangt man zu der folgenden Bestimmung, welche für eine möglichst zweckmäfsige Konstruktion maſsgebend ist: Man wähle den zu benutzenden Draht von demjenigen Metalle (unter den überhaupt in Betracht kommenden), welches die gröfste Ausdehnung durch Wärme zeigt, man wähle ihn so dünn, wie er sich irgend herstellen läfst, und mache ihn so lang, daſs der innere Widerstand des Instrumentes gleich demjenigen äufseren Widerstande ist, für welchen man dem Instrumente die gröfste Empfindlichkeit zu geben beabsichtigt.

Digitized by Google

12. Über eine die elektrische Entladung begleitende Erscheinung.

Aus WIEDEMANN's Annalen der Physik und Chemie. Bd. 19, S. 78—86, 1883.

Im Folgenden wird eine Erscheinung beschrieben, welche die elektrische Entladung, insbesondere den Flaschenfunken, in Luft und anderen Gasen bei nicht zu geringer Dichte häufig begleitet. Unter den meisten Verhältnissen ist dieselbe allerdings so unscheinbar, dafs sie nicht der Erwähnung wert gehalten worden zu sein scheint; dieselbe trat mir aber, als ich sie zuerst bemerkte, in so auffälliger Form entgegen, dafs ich veranlafst wurde, einige Versuche über ihre Natur anzustellen. Vorweg sei bemerkt, dafs zu den Versuchen ein gröfseres Induktorium benutzt wurde, welches in freier Luft Funken von 4 bis 5 cm gab, dafs die mehrfach erwähnte Leydener Flasche eine solche von etwa zwei Quadratfufs Belegung war, und dafs die Einschaltung derselben in den Stromkreis einfach in der Weise bewirkt wurde, dafs die eine Belegung mit dem einen, die andere mit dem anderen Pole des Induktoriums verbunden wurde, ohne dafs sonst etwas am Stromkreise geändert worden wäre.

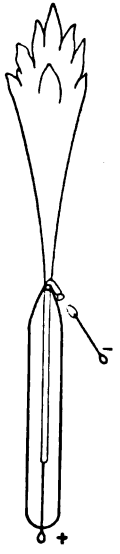


Fig. 25.

1. In Fig. 25 ist eine Entladungsvorrichtung dargestellt, welche aus einem nicht zu eng ausgezogenen Glasrohre, einer innerhalb desselben befindlichen und einer aufserhalb desselben in der Nähe der Mündung angebrachten Elektrode besteht. Bringt man diese Vorrichtung unter die Glocke der Luftpumpe, füllt die Glocke mit gut getrockneter Luft, entleert bis auf 30 bis 50 mm Druck und leitet die Ent-

Digitized by Google

ladungen des Induktoriums ein, so beobachtet man die folgende Erscheinung: An der Kathode sitzt das blaue Glimmlicht, es folgt gegen die Anode hin der einen oder einige Millimeter breite dunkle Raum, von dessen Grenze bis zur Anode ein roter Streifen von 1 bis 2 mm Durchmesser den Weg des Stromes bezeichnet. Dieser Streifen füllt bei jeder der beiden Stromrichtungen den gröfsten Teil der Länge des Glasrohres und biegt an dessen Mündung scharf gegen den aufserhalb befindlichen Pol um. Aufserdem aber bemerkt man einen aus der Mündung des Rohres geradlinig hervorspringenden, scharf begrenzten Strahl von braungelber Farbe, von etwa 4 cm Länge und von der in der Zeichnung, Fig. 25, angedeuteten Gestalt. Der gröfste Teil des Strahles scheint unbeweglich zu stehen, nur an der Spitze läuft er in einzelne flatternde Zungen aus. Der Strahl ändert seine Gestalt nicht merklich bei Umschaltung des Stromes. Wird aber eine Flasche eingeschaltet, so tritt eine wesentliche Änderung ein, der Strahl erscheint heller und geht nur auf eine Strecke von 1 bis 2 cm geradlinig fort, um sich dann in ein Büschel heftig bewegter, nach allen Seiten auseinandergehender Zweige aufzulösen, in der Art, wie dies Fig. 26 andeutet.

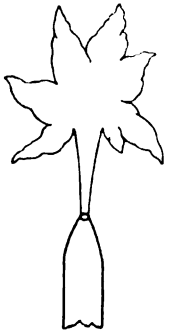


Fig. 26.

2. Vergröfsern oder verkleinern wir den Druck der Luft, so wird, falls wir zunächst von der Benutzung der Flasche absehen, nach beiden Richtungen hin der Strahl unscheinbarer, aber in verschiedener Weise. Vergröfsern wir den Druck, so füllt die Funkenbahn den Querschnitt der Mündung nicht mehr aus, auch der austretende Strahl füllt dann den Querschnitt nicht mehr, sondern tritt nur auf der Seite der Mündung aus, an welcher der Funke sich zeigt; er wird dabei schmäler, kürzer und nimmt eine dunklere, rotbraune Färbung an. Verkleinern wir den Druck, so wird der Strahl gleichfalls kürzer, aber er verbreitert sich gleichzeitig, nimmt eine hellere gelbe Färbung und eine geringere Lichtstärke an. Wenn sich die ersten Schichten in dem Rohre bilden, ist er nur noch eben wahrzunehmen, er erfüllt dann einen kleinen, halbkugelförmigen Raum vor der Mündung des Rohres. Bei Anwendung der

Digitized by Google

Flasche zeigt sich ein analoger Verlauf, das Maximum der Entwickelung aber liegt bei kleineren Drucken, und es wird vorteilhaft, die Mündung des Rohres weiter zu wählen. Die auffälligsten Formen in Luft habe ich beobachtet bei folgender Versuchsanordnung: die Glasröhre war 5 mm weit, 3 cm lang, ohne alle Verengung an der Mündung, die Luft war auf 10 bis 20 mm Druck gebracht und wurde durch ein unter die Glocke der Luftpumpe gestelltes Schälchen mit Schwefel- oder Phosphorsäure gut trocken gehalten, eine grofse Flasche war eingeschaltet und der Glanz der Entladungen selbst dadurch abgeblendet, dafs als äufsere Elektrode ein über das Glasrohr gestülptes und dasselbe etwas überragendes Metallrohr benutzt wurde. Der Strahl zeigte sich unter diesen Bedingungen als ein baumartiges Gebilde, welches bis zu 12 cm Höhe annahm, der dem Stamme entsprechende Teil schofs geradlinig auf eine Länge von 3 bis 5 cm aus dem Rohre auf, während die Krone aus Flammen gebildet wurde, die lebhaft nach allen Seiten auseinanderflatterten. Die Helligkeit läfst sich etwa nach der Angabe bemessen, dafs die Erscheinung auch im hellen Zimmer noch wahrnehmbar war, dafs aber zur Beobachtung der Einzelheiten das Zimmer verdunkelt werden mufste.

3. Kann der Strahl wegen zu grofser Nähe der gegenüberliegenden Wand nicht zu voller Entwickelung kommen, so breitet er sich an der Wand aus. Trifft er dieselbe senkrecht, so bildet er einen kreisförmigen Wulst um den Treffpunkt; trifft er unter einiger Neigung auf, so gleitet er an der Wand fort nach der Seite, nach welcher ein die Wand treffender Körper reflektiert werden würde. Die hier auftretenden Erscheinungen lassen sich am einfachsten beschreiben, indem man sagt, die Strahlen verhalten sich sehr ähnlich, wie es Flüssigkeitsstrahlen, die aus den Mündungen der Rohre austräten, thun würden.

4. Der Magnet zeigt keine Wirkung auf den Strahl. Ebensowenig thun dies genäherte Leiter, auch dann nicht, wenn dieselben geladen sind, z. B. wenn dieselben mit einem der beiden Pole verbunden werden.

5. Der Strahl erzeugt eine beträchtliche Erwärmung in den Körpern, auf welche er auftrifft. Ein Thermometer in den Strahl gebracht, steigt nach den Umständen um zehn und

Digitized by Google

mehr Grad, trifft der Strahl die Glaswand, so erhitzt er dieselbe fühlbar, kleine Gegenstände, mit Klebwachs an Drähte befestigt, werden im Strahl abgeschmolzen. Erzeugt man den Strahl in freier Luft (siehe unter 10), so kann die erzeugte Hitze direkt durch das Gefühl wahrgenommen werden. Hingegen gelang es nicht, einen noch so dünnen, in den Strom gehängten Platindraht zum Glühen zu bringen.

6. Der Strahl übt eine beträchtliche mechanische Wirkung aus. Ein in denselben gehängter Draht gerät in heftige Oscillationen, ebenso ein elastisches Glimmerblatt, durch welches man den Strahl ablenkt. Legt man ein Glimmerblättchen über die Mündung des Rohres, so wird es durch die erste Entladung weit fortgeschleudert. Radiometerartige Flugrädchen verschiedener Art können durch den Strahl in kontinuierliche Rotation versetzt werden. Indessen ist die Stofswirkung nicht einseitig von der Mündung fortgerichtet. Befestigt man vor derselben ein Glimmerblättchen so, dafs es nur in der Richtung gegen die Mündung hin beweglich ist, so gerät es gleichwohl in Schwingungen, beweisend, dafs nach jedem von der Mündung abgerichteten Stofs ein, wenn auch weniger energischer Rückstofs erfolgt.

7. Der Strahl ist keine momentan aufblitzende Erscheinung, sondern entwickelt sich in bequem mefsbarer Zeit. Seinen zeitlichen Verlauf habe ich untersucht einmal mit dem Drehspiegel, sodann mit einem eigens hierfür konstruierten Apparate, welcher übrigens schon von anderen angegeben ist, und der folgende Einrichtung hat: Auf die Axe eines BECQUEREL'schen Phosphoroskopes ist eine Scheibe mit schmalem, radialem Schlitze aufgesetzt; bei jeder Umdrehung der Scheibe bewirkt der Apparat bei einer bestimmten Stellung derselben die Öffnung des primären Stromes. Rotiert nun die Scheibe schnell, so erscheint sie durchsichtig, blickt man aber an verschiedenen Stellen hindurch, so sieht man die Dinge so, wie sie zu bestimmten verschiedenen Zeiten nach Öffnung des Stromes erscheinen. Dieser Apparat leistet meist viel bessere Dienste als der Drehspiegel, in dem vorliegenden Falle aber genügt der letztere. Beide Versuchsmethoden ergeben das Folgende: Die Erscheinung verläuft nicht momentan, sondern hat eine Dauer von etwa $\frac{1}{20}$ Sekunde. Nicht alle Teile des

Digitized by Google

Strahles erscheinen gleichzeitig; die unteren leuchten schon, ehe die oberen beginnen; die oberen sind sichtbar, nachdem die unteren schon erloschen sind. Die Erscheinung ist daher nur für das unbewaffnete Auge ein Strahl, in Wirklichkeit besteht dieselbe in einer leuchtenden Wolke, die aus dem Rohre mit endlicher Geschwindigkeit aufsteigt. Diese Geschwindigkeit ist, wenn keine Flasche benutzt wird, im Mittel für den ganzen Weg von der Ordnung von 2 m in der Sekunde, aber sie scheint bei Beginn des Vorganges weit gröfser zu sein, und ebenso scheint sie weit gröfser zu sein für Flaschenfunken, es war für solche häufig wohl das Nachleuchten des Gases, aber nicht die Entwickelung des Strahles zu beobachten.

8. Den beschriebenen analoge Erscheinungen treten auf in anderen Gasen, doch zeigen die Strahlen nach Farbe, Gestalt, Abhängigkeit von der Dichte etc. charakteristische Unterschiede. In Sauerstoff ist der Strahl sehr schön, sehr ähnlich demjenigen in Luft, jedoch die Färbung ein reineres Gelb. Die Erscheinung in Stickoxydul ist derjenigen in Sauerstoff fast gleich. In Stickstoff gelang es nur, sehr schwach sichtbare Strahlen herzustellen, die Färbung war am ehesten ein dunkles Rot. In Wasserstoff haben die Strahlen die beste Entwickelung bei circa 100 mm Druck, bei Anwendung kräftiger roter Flaschenfunken; die Färbung ist ein schönes Blau-Indigo, die Lichtstärke nicht grofs. Dagegen sind die räumlichen Dimensionen weit beträchtlicher, als in Luft, sodafs selbst in einer Glasglocke von 20 cm Höhe der Strahl sich nicht frei entwickeln kann, sondern sich an der oberen Wölbung ausbreitet. In Dampf von Terpentinöl und Äther, sowie in Leuchtgas sind die Strahlen grünlich weifs, kurz, scharf gezeichnet. Das Spektrum des Lichtes ist in Luft und Sauerstoff ein kontinuierliches, besonders in Rot, Gelb und Grün hervortretendes; in den kohlehaltigen Dämpfen ein Bandenspektrum, welches sicher als ein Kohlenspektrum erkannt werden konnte; in Wasserstoff war es wegen der Lichtschwäche äufserst schwer wahrzunehmen, doch sah ich zu verschiedenen Malen mit Sicherheit einige Banden, deren bemerkenswerteste mindestens sehr nahezu an der Stelle der grünblauen Wasserstofflinie lag, die übrigen lagen von hier aus in der Richtung des Violetten. In Stickstoff konnte ein Spektrum nicht erhalten werden.

Digitized by Google

9. In den genannten Gasen kann man das Vorhandensein eines Strahles immer durch die mechanische Wirkung desselben nachweisen, indessen ist der Strahl keineswegs unter allen Umständen deutlich sichtbar, und seine Sichtbarkeit scheint teilweise an sehr sonderbare Bedingungen geknüpft. Ungetrocknete Zimmerluft giebt ein aufserordentlich viel schwächeres Bild, als solche, welche gut getrocknet wurde. Stellt man unter die Glocke der Luftpumpe eine Schale mit Schwefelsäure oder Phosphorsäure oder Chlorcalcium, so sieht man die Erscheinung an Deutlichkeit gewinnen, in dem Mafse als die Luft trockener wird. Rätselhafter noch erscheint das Verhalten des Wasserstoffes. Füllte ich die Glocke mit demselben, so riefen die Entladungen des Ruhmkorffs nicht ohne weiteres das Leuchten hervor, sondern Flaschenfunken waren hierzu erforderlich; war der Strahl indes einmal sichtbar geworden, so konnte er ohne die Einschaltung der Flasche unterhalten werden. Er dauerte aber nur einige Minuten an, dann erlosch er, ohne dafs ich ihn wieder hervorrufen konnte. Ich habe die Bedingung des Leuchtens nicht ausfindig zu machen vermocht. Die gröfsere oder geringere Feuchtigkeit schien von keinem Einflusse, ebensowenig die Anwesenheit einer kleinen Menge Sauerstoffs. Blieb der Wasserstoff stundenlang unter der Glocke, ohne benutzt zu werden, so verlor er sein Leuchtvermögen nicht, war dasselbe durch die Entladungen aber einmal zerstört, so stellte auch stundenlange Ruhe dasselbe nicht wieder her. Ich würde das Leuchten auf Verunreinigungen schieben[1]), wenn ich nicht glaubte, das Spektrum des ausgesandten Lichtes als ein Wasserstoffspektrum erkannt zu haben. Übrigens erfolgen die Schwingungen eines dem Strahle entgegengestellten Glimmerblättchens ebenso lebhaft in feuchter wie in trockener Luft, in frisch bereitetem Wasserstoff, wie in solchem, welcher zu leuchten aufgehört hat, sodafs das Sichtbarwerden der Strahlen nur als eine nebensächliche Eigenschaft derselben erscheint.

10. Man kann die Strahlen auch in Gasen von Atmosphärendruck hervorrufen; man thut zu dem Ende gut, eine

[1]) Der Wasserstoff war bereitet aus reinem Zink und verdünnter Schwefelsäure.

Digitized by Google

der bisher benutzten ähnliche, aber kleinere Entladungsvorrichtung anzuwenden. Die Erscheinung ist allerdings nur einige Millimeter lang und sehr unscheinbar, aber man kann an derselben mit Bequemlichkeit einige weitere Beobachtungen anstellen. Man kann die Hitze und den Stofs des Strahles dem Gefühle direkt wahrnehmbar machen. Der Strahl treibt Rauch und kleine Flammen auch in einer Entfernung von 2 bis 3 cm von der Mündung des Glasrohres auseinander. Durch einen starken Luftstrom wird der Strahl umgeknickt und bei Seite getrieben. Bläst man durch die Mündung, an welcher sich der Strahl bildet, so verlängert sich derselbe, saugt man Luft ein durch die Mündung, so verkürzt er sich. Leitet man durch die Mündung ein anderes Gas und stülpt gleichzeitig ein Reagensgläschen über dieselbe, so erhält man die Erscheinung in dem betreffenden Gase; beispielsweise erhält man so in Wasserstoff einen nur wenige Millimeter langen, aber deutlich sichtbaren blauen Strahl. Leitet man durch die Mündung Leuchtgas und entzündet dasselbe, so oscilliert die Flamme heftig beim Durchgange der Funken; der unter 7 beschriebene Apparat zeigt, dafs durch jeden Funken eine kleine Gaswolke ausgestofsen wird, die oberhalb der Mündung getrennt von der übrigen Gasmasse verbrennt.

11. Nach allem Gesagten kann es kaum zweifelhaft erscheinen, dafs der Strahl gebildet wird durch eine aus dem Rohre austretende leuchtende Gasmasse, und es liegt die Annahme nahe, dafs die austreibende Ursache in der Expansivkraft zu suchen sei, welche die gesteigerte Temperatur dem Gasinhalte erteilt. Bringt man indes die Elektrode, welche bisher aufserhalb des Rohres lag, im Inneren desselben nahe der Mündung an, oder läfst man die Funken in einem beiderseits geschlossenen Glasrohre überschlagen, welches in irgend einem seitlichen Punkte eine Öffnung besitzt, so treten zwar auch in diesen Fällen aus den Mündungen Strahlen aus, aber dieselben sind viel schwächer, als diejenigen, welche an den gleichen Öffnungen entstehen würden, falls auch die Funken die Öffnungen passierten. Wäre erhöhte Temperatur die Ursache des Austretens, so könnte ein solcher Unterschied nicht bestehen. Deutlicher, als diese immerhin zweideutigen Versuche sprechen gegen die obige Annahme die Formen, in

Digitized by Google

welche der Strahl übergeht, wenn die Entladungsvorrichtung gänzlich geändert wird.

12. Verkürzt man nämlich das Rohr mehr und mehr und ändert die Entfernung und Gestalt der Elektroden, so kann man die bisher benutzte Entladungsvorrichtung kontinuierlich in jede andere überführen, dabei verändert der Strahl seine Gestalt, aber er verschwindet nicht, sondern geht kontinuierlich in andere Formen über. Es zeigt sich, dafs die bisher benutzte Entladungsvorrichtung vor allen übrigen nur deshalb den Vorzug verdient, weil sie die hier betrachtete Erscheinung von der übrigen Lichtmasse der Entladung isoliert. Die auftretenden Gebilde sind sehr mannigfaltig und oft sehr zierlich, mein Beobachtungsmaterial reicht nicht aus, dieselben in Ordnung darzustellen. Im allgemeinen zeigt sich die Form derselben abhängig von der Richtung des Stromes, und es läfst sich deutlich erkennen, dafs die bewegten Gasmassen Geschwindigkeitskomponenten in Richtung der Strombahn besitzen, deren Ursache nicht einfach in der erhöhten Temperatur der Funkenbahn gesucht werden kann. Zur Bestätigung genügt das einzige Beispiel, welches ich anführen will. Läfst man den Funken der Flasche zwischen kugelförmigen Elektroden von nicht zu grofsem Abstande überschlagen, so erscheint das dem Strahle analoge Gebilde als ein die Mitte der Funkenbahn umgebender Wulst. (Fig. 27, a, α.) Die Farbe desselben ist entsprechend der Farbe des Strahles gelb bei geringen Dichten, rotbraun bei atmosphärischem Drucke. In dieser letzteren Färbung kann der Wulst mit einiger Aufmerksamkeit an jedem Funken gesehen werden, der zwischen den Elektroden einer Holtz'schen Maschine überspringt, wenn die (nicht allzu kleinen) Flaschen derselben benutzt werden. Interessant ist der Aufschlufs, welchen das unter 7 erwähnte Instrument über die Bildung dieses Wulstes giebt. Zunächst erscheint der

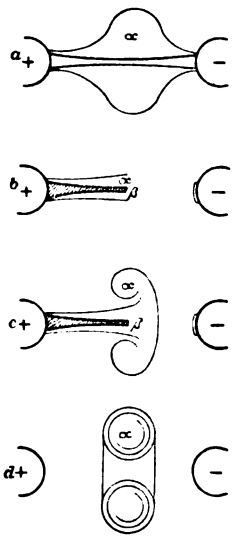


Fig. 27.

Digitized by Google

helle geradlinige Funke, während dessen Dauer das gelbe Licht entweder noch nicht vorhanden ist oder wegen der Blendung des Auges nicht gesehen werden kann, ihm folgt die Aureole (Fig. 27, *b*, *β*), vom positiven Pole als roter Streif ausgehend und mit dem gelben Lichte *α* umgeben, letzteres staut sich etwas jenseits der Mitte des Weges zur Kathode und bildet einen Wirbel (Fig. 27, *c*); diesen Wirbel sieht man noch einige Zeit in der Luft zwischen den Elektroden stehen (Fig. 27, *d*), nachdem die übrige Erscheinung erloschen ist; das ganze hat übrigens nur eine Dauer von etwa $\frac{1}{40}$ Sekunde.

Die hier beschriebenen Erscheinungen habe ich in der Litteratur nicht erwähnt gefunden; Hr. Dr. GOLDSTEIN hatte bei seinen zahlreichen Versuchen über die Entladung in verdünnten Gasen analoge Erscheinungen schon häufig beobachtet, auch machte er mich erst aufmerksam auf den vorteilhaften Einfluſs, den ein sorgfältiges Trocknen der Luft auf die Helligkeit des gelben Lichtes ausübt.

Digitized by Google

13. Versuche über die Glimmentladung.

Aus Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie. Bd. 19, S. 782—816, 1883.

Zu Versuchen über die Glimmentladung in verdünnten Gasen haben bisher als Elektricitätsquellen gedient die Influenzmaschine, das Induktorium und Batterieen von grofser Elementenzahl. Der Influenzmaschine gaben den Vorzug die Herren G. Wiedemann und Rühlmann, E. Wiedemann und Spottiswoode bei vielen Untersuchungen, des Induktoriums bedienten sich hauptsächlich die Herren Plücker, Hittorf bei seinen früheren Versuchen, Goldstein und Crookes. Mit grofsen Batterieen wurden ausgeführt neben älteren Versuchen von Gassiot die neueren von Hittorf mit seiner Chromsäurekette, vor allem berühmt sind die Chlorsilberbatterie der Hrn. Warren de la Rue und Müller und die mit dieser ausgeführten Arbeiten. Es schien mir, als ob gewisse Versuche, welche für die Erkenntnis des Wesens der Glimmentladung von Wichtigkeit sind,[1]) sich nicht anders als unter Benutzung einer Batterie würden entscheiden lassen; so wurde ich veranlafst, mir für diese Versuche eine Batterie von 1000 sekundären Planté'schen Elementen zusammenzustellen. Es zeigte sich, dafs die Batterie in der gewählten Anordnung nicht von Dauer war, indessen reichte sie aus, einen Teil der Versuche, welche ich im Auge hatte, auszuführen. Diese Versuche sollen in folgendem beschrieben werden.

[1]) Zu diesen Versuchen wurde ich ursprünglich angeregt durch Unterredungen, welche ich mit Hrn. E. Goldstein über die Natur der von ihm so vielfach untersuchten Glimmentladung hatte. Während der Ausführung der Versuche liefs Hr. Dr. Goldstein stets in bereitwilligster Weise seine Kenntnis der Litteratur und der Thatsachen mir zu gute kommen, so dafs ich ihm vielfach zu Dank verpflichtet bin.

Digitized by Google

Beschreibung der Batterie.

Das Prinzip einer vielpaarigen sekundären Kette, welches von POGGENDORFF in seiner Polarisationsbatterie benutzt worden war, und welches auf PLANTÉ'sche Elemente schon PLANTÉ selber angewandt hat, besteht darin, dafs diese Elemente nebeneinander (auf Quantität) geschaltet, durch eine primäre Kette von verhältnismäfsig kleiner elektromotorischer Kraft geladen werden, dann aber, hintereinander (auf Spannung) geschaltet, fähig sind, sehr grofse elektromotorische Kräfte hervorzubringen. Dabei ist es nicht nötig, alle Elemente einzeln nebeneinander zu schalten, man kann auch Systeme von fünf oder zehn oder mehr Elementen dauernd hintereinander verbunden lassen und nur diese Systeme bei der Ladung nebeneinander stellen. Je gröfser man die Zahl der dauernd hintereinander verbundenen Elemente wählt, um so einfacher ist der Mechanismus der Umschaltung; eine um so gröfsere elektromotorische Kraft ist freilich auch zur Ladung erforderlich. Ich richtete es so ein, dafs ich je fünf Elemente dauernd in Verbindung liefs. Die benutzten Batteriegläschen hatten die Gestalt von Reagenzgläsern, sie hatten 125 mm Höhe, 14 bis 15 mm Durchmesser und waren bis zu $\frac{2}{3}$ ihrer Höhe mit einer Mischung aus einem Volumen Schwefelsäure und neun Volumen Wasser gefüllt. Die als Elektroden dienenden Bleistreifen sind von entsprechender Länge, von 10 mm Breite und 1 mm Dicke, sie waren an ihren Köpfen mit Asphaltlack gefirnist. Die benachbarten Elektroden der inneren von den fünf Elementen waren ohne weiteres Zwischenglied aus demselben Bleistreifen gebogen; von den äufseren Elektroden führten angelötete Kupferdrähte zu zwei gläsernen Quecksilbernäpfen, welche die Pole des Systemes bilden. Je 50 Elemente waren auf ein gemeinsames Brettchen aufgekittet, je 250 standen in einem Kasten von 840 mm Länge, 120 mm Breite und 170 mm Höhe. Die 100 Glasnäpfchen, welche die zugehörigen Pole bildeten, liefen in einer Reihe an der Vorderseite des Kastens hin. Die Kommutation wurde bewirkt durch zwei Kommutatoren, welche miteinander vertauscht werden konnten, und von denen der eine für die Ladung, der andere für die Entladung diente. Dieselben waren gebildet aus Drahthäkchen, welche an einer Holz-

Digitized by Google

leiste befestigt waren, ihre Konstruktion ist sehr einfach und bedarf wohl keiner besonderen Auseinandersetzung.

Die Batterie leistete, so lange sie in gutem Zustande war, das Folgende. Zu ihrer Ladung waren zehn BUNSEN'sche oder GROVE'sche Elemente erforderlich. Hatten diese während einer Stunde ihren Strom in die Batterie gesandt, so war die letztere für die Arbeit eines Tages hinreichend vorbereitet. Die Spannungsdifferenz ihrer Pole kam dann der von 1800 DANIELL'schen Elementen nahezu gleich, ihr innerer Widerstand war etwa gleich 600 S.-E., wie teils aus dem Verhalten einzelner Elemente, teils auch aus Versuchen, die mit dem Strome der ganzen Batterie in sehr grofsen Widerständen angestellt wurden, ermittelt werden konnte. Diese Spannung erhielt sich, wenn die Batterie nicht oder nur äufserst wenig benutzt wurde, etwa 12 bis 14 Stunden, dann aber war teils und hauptsächlich durch chemische Wirkung, teils durch Nebenschliefsung die Ladung zerstört, und die Spannung sank schnell auf kleinere Werte. Wurde die Batterie nur von Zeit zu Zeit durch gröfsere Widerstände geschlossen, wie es die Versuche meist mit sich brachten, so war sie auf etwa sechs Stunden benutzbar, andauernd vermochte sie den zur Erleuchtung eines GEISSLER'schen Rohres erforderlichen Strom auf zwei bis drei Stunden zu liefern; wurde sie jedoch mit einem kleinen Widerstande oder gar in sich selbst geschlossen, so war sie in wenigen Minuten, ja selbst in Bruchteilen einer Minute erschöpft. Sie zeigte dann die bekannte Rückstandsbildung. In freier Luft gab die Batterie einen Schliefsungsfunken von nahe an $\frac{1}{2}$ mm Länge; GEISSLER'sche Rohre der gewöhnlichen Form ohne Kapillare erleuchtete sie innerhalb eines Druckintervalles von etwa $1\frac{1}{2}$ mm, wo das blaue Glimmlicht die Kathode noch als dünne Haut bekleidet, bis hinunter zu Drucken von wenigen Hundertsteln Millimetern, wo die Strahlen desselben eine Länge von 120 bis 150 mm erreichen. Im allgemeinen durften die Poldrähte der Batterie nicht ohne Einschaltung eines Widerstandes von vielen Tausend S.-E. mit den Elektroden eines GEISSLER'schen Rohres verbunden werden, sonst ging die Glimmentladung sofort in Bogenentladung über, wobei gemeiniglich das Rohr sprang und die Batterie sich in wenig Augenblicken erschöpfte.

Digitized by Google

Diese Batterie ging in folgender Weise zu Grunde. Die Schwefelsäure saugte sich in den kapillaren Raum zwischen den Bleiplatten und der Lackschicht ein und pflanzte sich in diesem Raume immer weiter fort. Wurde die scheinbar unversehrte Lackschicht an irgend einer Stelle abgeblättert, so war unter derselben durch den Geschmack die Säure leicht nachzuweisen. Letztere erreichte so die Kupferdrähte der Endplatten und erzeugte an denselben Auswucherungen von Kupfervitriol, welche sich an den Drähten ausbreiteten. Nachdem die Batterie drei bis vier Wochen in Gebrauch war, erreichten diese Auswucherungen an den Drähten der vorderen Endplatten das Quecksilber der Kommutatornäpfe, sogleich amalgamierte dann das Quecksilber den Draht seiner ganzen Länge nach, und da das innere Ende der Drähte tiefer lag als das Niveau des Quecksilbers in den Näpfen, so floſs das Quecksilber an dem amalgamierten Drahte wie durch ein Heberrohr ab, und der Napf entleerte sich nach jeder neuen Füllung wieder in wenigen Stunden. Diesem Ausfliefsen konnte nun zwar vorgebeugt werden, indem die betroffenen Drähte wieder ausgeglüht und dann auf eine Strecke mit Siegellack umschmolzen wurden, aber die Zerstörung der Kupferdrähte schritt fort, und nach vier bis fünf Monaten brach eine grofse Zahl derselben an der Lötstelle ab. Es ist zu bemerken, dafs einzelne Drähte völlig unversehrt blieben, es schienen dies diejenigen zu sein, welche durch Zufall auf eine gewisse Strecke von der Lötstelle aus verzinnt worden waren.

Die allgemeine Erscheinung der Batterieentladung in verdünnten Gasen ist heutzutage bekannt genug, ich halte mich deshalb bei derselben nicht auf, sondern gehe zur Darstellung der besonderen Versuche über.

I. Ist die Batterieentladung in verdünnten Gasen kontinuierlich oder diskontinuierlich?

Als Gassiot zuerst mit Hilfe einer grofsen Batterie die Glimmentladung herstellte und das scheinbar vollkommen kontinuierliche Bild derselben im rotierenden Spiegel betrachtete, fand er, dafs sich dieselbe in eine Reihe sehr schnell aufeinander folgender Partialentladungen zerlegen liefs. Auf dieser Erfahrung beruhte die Ansicht der Physiker, dafs die

Digitized by Google

Glimmentladung ihrer Natur nach disruptiv sei, also, dafs jede scheinbar kontinuierliche Entladung notwendigerweise aus einer Folge einzelner disruptiver Partialentladungen bestehen müsse. Diese Ansicht hatte wohl die Zustimmung der meisten Physiker, bis im Jahre 1879 HITTORF zeigte, dafs die Erfahrung GASSIOT's zu allgemeinen Schlüssen nicht berechtige; dafs sich mit einer Batterie von hinreichend kleinem Widerstande eine Glimmentladung herstellen lasse, welche wenigstens der Drehspiegel nicht in Partialentladungen zu zerlegen vermöge; und dafs verschiedene Anzeichen dafür sprechen, dafs auch ein beliebig schnell rotierender Spiegel eine solche Auflösung nicht zustande bringen würde. Indessen mufste nach einer Rechnung, welche Hr. E. WIEDEMANN[1]) anstellte, der Drehspiegel seinen Dienst versagen, wenn auch nur hunderttausend Entladungen in der Sekunde sich folgen; daher vermochte Hr. HITTORF diejenigen Physiker nicht zu überreden, welche aus anderen Gründen zur Annahme der Diskontinuität sich gedrängt fühlten, jedoch zuzugeben bereit waren, dafs viele Hunderttausende, ja Millionen von Einzelentladungen in der Sekunde den Strom bilden könnten. Zu diesen gehören die Hrn. E. WIEDEMANN[2]), GOLDSTEIN[3]), WARREN DE LA RUE[4]). Der letztere hat auch Versuche beschrieben, in welchen er die Diskontinuität einer scheinbar kontinuierlichen Entladung durch andere Mittel als durch den Drehspiegel nachwies, aber dieser Nachweis liefs sich nur führen unter besonderen Umständen, und diese Umstände scheinen solche zu sein, unter welchen auch der Drehspiegel die Diskontinuität würde gezeigt haben.

Die in Rede stehende Frage kann hiernach noch als eine offene betrachtet werden; dieselbe darf allerdings nicht so formuliert werden: ob eine scheinbar kontinuierliche Entladung unter Umständen als eine diskontinuierliche sich erweisen könne? — dafs diese Frage zu bejahen sei, unterliegt keinem Zweifel — sondern sie ist so zu präzisieren: ob sich eine Ent-

[1]) Siehe WIEDEMANN's Ann. Bd. 10, S. 244, 1880.
[2]) Siehe WIEDEMANN's Ann. Bd. 10, S. 245, 1880.
[3]) Siehe WIEDEMANN's Ann. Bd. 12, S. 101, 1881.
[4]) Siehe Ann. de chim. et de phys. Serie 5, Bd. 24, S. 461, 1881, und Phil. Trans. Bd. 169, S. 225, 1878.

Digitized by Google

ladung nachweisen lasse, welche unzweifelhaft als Glimmentladung sich darstelle, und welche dennoch bei Anwendung der feinsten auffindbaren Prüfungsmethoden keine Spuren von Diskontinuität erkennen lasse.

Die Entladung, welche mit Hilfe der folgenden Methoden geprüft wurde, fand statt in einem Rohre von 340 mm Länge und 20 mm lichter Weite, zwischen einer als Kathode dienenden Stahlplatte von 18 mm Durchmesser und einem Stahldraht; sie fand statt in Luft bei solchem Drucke, dafs das blaue Glimmlicht bis zu einer Entfernung von 50 bis 60 mm von der Kathode reichte, und dafs sich in dem Rohre noch sechs bis neun positive rote Schichten bildeten. Die benutzte Stromstärke, welche durch einen eingeschalteten grofsen Flüssigkeitswiderstand reguliert wurde, lag zwischen $\frac{1}{100}$ und $\frac{1}{400}$ Dan./S.-E. Nur bei der letzten anzuführenden Methode mufste eine gröfsere Stromstärke benutzt werden, dieselbe betrug $\frac{1}{15}$ bis $\frac{1}{30}$ Dan./S.-E.; es wurde deshalb ein etwas weiteres und kürzeres Rohr gewählt, so dafs nur eine positive Schicht und diese nur andeutungsweise sichtbar wurde. Aber es konnte über die Natur der Entladung als Glimmentladung gleichwohl kein Zweifel sein. Es versteht sich von selbst, dafs diese untersuchten Entladungen die gewöhnlichen Symptome der Intermittenz nicht zeigten, weder waren sie irgend empfindlich gegen die Annäherung eines Leiters, noch tönte ein in den Stromkreis eingeschaltetes Telephon, noch gaben die Röhren selbst einen Ton aus, noch liefs sich endlich durch den Drehspiegel das Bild der Entladung in Einzelbilder zerlegen.

1. Es wurden zuerst die von Warren de la Rue[1]) angegebenen Versuche wiederholt, indem der Strom der Batterie aufser durch das Gasrohr auch durch die primäre oder sekundäre Spirale verschiedener kleiner Induktorien geleitet wurde, während die freie Spirale derselben durch ein Dynamometer oder Galvanometer geschlossen war. In keinem Falle erhielt ich eine Ablenkung dieser Instrumente, welche auf einen durch Intermittenz des Batteriestromes erregten hin- und hereilenden Induktionsstrom schliefsen liefs. Indes will dies Resultat nicht viel sagen. Was zunächst die dynamo-

[1]) l. c.

Digitized by Google

metrische Wirkung der induzierten Ströme anlangt, so wächst dieselbe zwar zunächst mit der Zahl der Unterbrechungen des induzierenden Stromes, aber wird diese Zahl sehr grofs, so wird darum doch die dynamometrische Wirkung nicht unendlich, sondern nähert sich, da die einzelnen Induktionsstöfse durch die eigene Selbstinduktion gehindert werden, einer festen Grenze; selbst dieser Maximaleffekt aber konnte mit dem von mir benutzten Dynamometer kaum noch wahrgenommen werden. Was die Wirkung im Galvanometer anlangt, so ist eine solche nach der bekannten Theorie der Induktion überhaupt nicht zu erwarten, auch dann nicht, wenn der Strom bei jeder Einzelentladung schneller abfällt als ansteigt, und nur das entgegengesetzte Resultat der Hrn. Warren de la Rue und Müller veranlafste mich, diese Versuche anzustellen. Aber leider gelang es nicht, das von jenen Forschern beobachtete Phänomen zu reproduzieren; sobald das Galvanometer der direkten magnetischen Wirkung der durchflossenen Spirale entzogen war, konnte nach Schlufs des Batteriestromes kein bleibender Ausschlag wahrgenommen werden, obwohl der Induktionsstofs beim Öffnen und Schliefsen des Stromes die Nadel über die sichtbare Skala hinaustrieb.[1])

2. In den Strom wurden aufser dem Rohre und einem gröfseren Flüssigkeitswiderstande gleichzeitig ein Galvanometer und ein Dynamometer eingeschaltet und an beiden Instrumenten die verursachte Ablenkung abgelesen. Es wurde sodann die Batterie, das Gasrohr und der Flüssigkeitswiderstand von den beiden Messinstrumenten gelöst und statt ersterer ein Daniell und soviel metallischer Widerstand mit den letzteren verbunden, dafs die Galvanometerablenkung wieder die frühere wurde. Es zeigte sich, dafs dann auch die Dynamometerablesung mit aller Schärfe wieder die frühere geworden war. Wäre aber der Strom, den die grofse Batterie durch das Gasrohr erzeugte, ein intermittierender gewesen, so hätte er bei gleicher magnetischer Wirkung eine bedeutend gröfsere dynamometrische Wirkung haben müssen. Wäre beispielsweise

[1]) Sicherlich läfst sich eine erfolgte Ablenkung der Nadel nicht als normale, irgend zu erwartende galvanometrische Wirkung auffassen. Eher vielleicht als sogenannte doppelsinnige Ablenkung, so dafs das Galvanometer nur als ein sehr empfindliches Dynamometer wirkt.

Digitized by Google

die Dauer einer Partialentladung gleich $\frac{1}{4}$ der Zeit vom Beginne einer solchen Entladung bis zum Beginne der nächsten, so müfste während dieser Dauer der Strom viermal stärker sein als der, eine gleiche magnetische Wirkung ausübende kontinuierliche Strom, daher wäre eine dynamometrische Wirkung während jener Dauer sechszehnmal, im Mittel über die ganze Zeit aber viermal gröfser als die des kontinuierlichen Stromes. Dieser Versuch deutet daher auf Kontinuität der Entladung.

3. Es wurde der Strom dem Rohre zugeleitet durch eine Wheatstone'sche Brückenvorrichtung; einen Zweig derselben bildete die sekundäre Spirale eines kleinen Induktoriums von 1700 S.-E. Widerstand und einem Selbstinduktionskoefficienten von zehn Erdquadranten, die anderen drei Zweige waren gebildet durch gleichwertige Metallwiderstände von verschwindendem Selbstpotential. In die eigentliche Brücke war ein Dynamometer eingeschaltet und die Vorrichtung so abgeglichen, dafs ein kontinuierlicher, dieselbe durchfliefsender Strom keine Ablenkung des Dynamometers hervorbrachte. Dann rief auch der das Geissler'sche Rohr durchsetzende Batteriestrom keine Ablenkung hervor, obwohl er stark genug war, eine sehr merkliche Wirkung hervorzubringen, sobald das Gleichgewicht durch Einschaltung von 100 S.-E. in einen Zweig gestört wurde. Dieser Versuch spricht gegen die Diskontinuität. Denn einen intermittierenden Strom können wir uns als zusammengesetzt denken aus einem kontinuierlich fliefsenden Teile und einem solchen, welcher seine Richtung beständig wechselt. Nur für den ersteren war die Brücke abgeglichen, dem letzteren hingegen mufste die Spirale bei ihrer starken Selbstinduktion einen aufserordentlich viel gröfseren scheinbaren Widerstand entgegensetzen, als die anderen Zweige. Es hätte also, wenn ein alternierender Teil vorhanden gewesen wäre, ein oscillierender Strom das Dynamometer durchfliefsen müssen, und dieser hätte stark genug sein müssen, eine merkliche Ablenkung hervorzurufen.

Die bisherigen Versuche beweisen, dafs in dem gröfsten Teile des metallischen Schliefsungsbogens der Strom auch bei Einschaltung einer Luftstrecke kontinuierlich flofs. Auf den Strom im Rohre selbst lassen dieselben einen Schlufs nur in-

Digitized by Google

soweit zu, als man den Strom als gleichförmig in allen seinen Teilen annehmen darf. Beträgt nun aber die Zahl der Partialentladungen 100 000 oder mehr in der Sekunde, so ist diese Annahme nicht allein unsicher, sondern es ist dann sogar unzweifelhaft, dafs die Stromschwankungen nur auf kurze Strecken in die notwendig mit grofsem Selbstpotential behafteten Spiralen eindringen können, im Inneren derselben aber ausgelöscht werden müssen. Es könnte also von der beabsichtigten Wirkung nur ein vielleicht sehr kleiner Bruchteil zustande kommen. In den folgenden Versuchen sind deshalb Spiralen vermieden.

4. Der Strom wurde durch eine Brückenvorrichtung (Fig. 28) geleitet, deren vier Zweige aus gleichen Flüssigkeitswiderständen von je 700 000 S.-E. bestanden. Es waren dies dünne Glasröhren von 30 cm Länge, welche mit sehr verdünnter Zinkvitriollösung gefüllt waren. Die mittlere Potentialdifferenz an den Gelenken a und b — genauer das mittlere Quadrat dieser Differenz — konnte mit Hilfe eines Goldblattelektroskopes wahrgenommen werden, es befanden sich nämlich die mit dem einen Gelenke verbundenen Goldblättchen in einem Metallkasten, welcher zu dem anderen Gelenke abgeleitet war. Die Goldblättchen wurden hier und in dem folgenden Versuche unter dem Mikroskope beobachtet, die eben noch wahrzunehmende Potentialdifferenz war etwa $\frac{1}{10}$ derjenigen, welche während des Stromdurchganges zwischen a und c herrschte. Die beiden Gelenke a und c konnten durch kurze metallische Leitungen mit den beiden Belegen eines Kondensators von sehr grofser Kapazität verbunden werden. Die Widerstände waren so abgeglichen, dafs die Goldblättchen keine Divergenz zeigten, wenn der Strom ohne Einschaltung des Kondensators die Brücke durchfloſs. Es fand sich, dafs dann auch nach Einschaltung des Kondensators nicht die mindeste Divergenz wahrzunehmen war. Auch dies Resultat spricht gegen Diskontinuität. Denn durchfliefst ein sehr schnell intermittierender Strom die Vorrichtung, und denken wir uns denselben wie vorhin zusammengesetzt aus einem kontinuier-

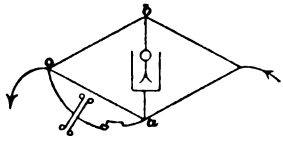


Fig. 28.

Digitized by Google

lichen und einem alternierenden Teile, so ist nur für ersteren die Brücke abgeglichen, für den letzteren hat dagegen der Zweig *ac* scheinbar einen verschwindenden Widerstand, da der Kondensator ohne merkliche Steigerung des Potentialunterschiedes seiner Belegungen die durch den alternierenden Strom geförderte Elektricitätsmenge aufzunehmen und abzugeben imstande ist. Für den alternierenden Teil müfste daher die Potentialdifferenz zwischen *a* und *c* sehr klein, also diejenige zwischen *a* und *b* hinreichend grofs werden, um wahrgenommen werden zu können. Es war nicht überflüssig, die Richtigkeit dieser Folgerung durch den Versuch zu prüfen. Es wurde deshalb in den äufseren Stromkreis ein Zahnrad mit sehr vielen Zähnen eingefügt, durch welches künstlich der Strom bis zu 2000 malen in der Sekunde unterbrochen werden konnte. Wurde diese Unterbrechung vorgenommen, so blieben trotzdem die Goldblättchen in Ruhe, sobald der Kondensator ausgeschaltet war, sie divergierten aber nach Einschaltung desselben augenblicklich; diese Divergenz wuchs mit der Zahl der Unterbrechungen und war bei der oben angegebenen Zahl eine sehr beträchtliche. Eine einzelne Schliefsung und Öffnung des Stromes gab sich nach Einschaltung des Kondensators durch ein kurzes Zucken der Goldblättchen zu erkennen. Ich schätze, dafs schon viele Hunderttausende von Partialentladungen in der Sekunde stattfinden müfsten, um das angewandte Prüfungsmittel unwirksam zu machen. Es konnte allerdings unwirksam werden, wenn sich die Intermittenzen so schnell folgten, dafs die elektrischen Wellen in der Zwischenzeit sich nur auf kleine Bruchteile der Längen der benutzten Flüssigkeitswiderstände fortpflanzen konnten.

5. Mit der negativen Elektrode wurden durch einen kurzen Kupferdraht die Blättchen eines Goldblattelektroskopes verbunden; diese Blättchen hingen in einem Metallkasten, welcher entweder durch einen Metalldraht mit der positiven Elektrode oder mittels eines sehr grofsen Widerstandes von einigen Millionen S.-E. gleichfalls mit der negativen Elektrode verbunden werden konnte. Wurde durch das Rohr der Strom geleitet und der Metallkasten mit der positiven Elektrode verbunden, so divergierten die Goldblättchen heftig; sie zeigten keine Spur von Divergenz, sobald der Metallkasten durch den erwähnten

Digitized by Google

Widerstand mit der negativen Elektrode verbunden war. Dieser Erfolg spricht gegen die Diskontinuität der Entladung. Schwankte nämlich das Potential an der Kathode sehr schnell zwischen dem zur Entladung notwendigen und einem viel kleineren Potential hin und her, so würde wohl das Potential der Goldblättchen diesen Schwankungen zu folgen vermögen, nicht aber dasjenige des Metallkastens; die auf dem letzteren vorhandene Elektricitätsmenge würde beständig die dem mittleren Potentialwerte entsprechende bleiben, der Ausschlag der Goldblättchen wäre also proportional dem Quadrate der Abweichung des Potentiales von seinem Mittelwerte. Dafs eine intermittierende Entladung in der That Divergenz zur Folge hatte, konnte nachgewiesen werden, indem man den in den Batteriestrom eingeschalteten Widerstand mehr und mehr wachsen liefs; bei einem gewissen sehr hohen Werte desselben fing dann die Entladung an, die von Hrn. Hittorf angegebenen Kennzeichen der Diskontinuität zu zeigen; zugleich fingen dann die Goldblättchen an, nicht unbeträchtlich zu divergieren. Der gleiche Erfolg konnte durch künstliche Unterbrechung des Batteriestromes hervorgerufen werden. Auch das hier benutzte Prüfungsmittel mufs versagen, sobald die Zahl der Unterbrechungen in der Sekunde eine gewisse Höhe erreicht, aber die hierzu erforderliche Zahl läfst sich mit einiger Annäherung berechnen. Die Partialentladungen, wenn solche vorhanden waren, konnten nur bestehen in den Entladungen der auf der Kathode und den damit metallisch verbundenen Goldblättchen angesammelten Elektricität, die Kapazität dieses Systemes war sicherlich nicht gröfser als die einer Kugel von 20 mm Radius. Die Schwankung des Potentiales bei jeder Entladung konnte nicht den Wert von 90 Daniells überschreiten, denn es zeigte sich, dafs eine solche Abweichung des Potentiales der Goldblättchen von dem des umgebenden Kastens sich schon durch eine wahrnehmbare Divergenz zu erkennen gab. Nun würden 1000 Entladungen in der Sekunde einer Kugel von 20 mm Radius, die jedesmal auf 90 Daniells geladen würde, erst einen Strom bilden, wie ihn 1 Daniell in ca. 5 Millionen S.-E. erzeugt. Aber der bei den Versuchen benutzte Strom stieg bis zu Stärken von 1 Daniell in 100 S.-E. Wenn derselbe also überhaupt aus

Digitized by Google

Partialentladungen sich zusammensetzte, so mufsten deren mindestens 50 Millionen auf die Sekunde entfallen.

6. Die Anode des zu untersuchenden Gasrohres war durch einen dicken Metalldraht mit der einen Platte eines KOHLRAUSCH'schen Kondensators verbunden, die Kathode war mit der anderen Platte verbunden durch einen sehr dünnen Silberdraht von 80 mm Länge und ca. 0,8 S.-E. Widerstand. An diesem letzteren war eine Vorrichtung angebracht, welche erlaubte, mittels Spiegels und Skala eine äufserst kleine Verlängerung, also auch eine sehr kleine Temperaturerhöhung des Drahtes infolge eines hindurch gesandten Stromes wahrzunehmen. Es war schon eine Temperaturerhöhung von $\frac{1}{30}^0$ C. erkennbar, der Strom, welcher diese Temperaturerhöhung hervorrief, war gleich $\frac{1}{100}$ Daniell/S.-E. Der Draht bildete so eine Art Dynamometer ohne Spiralen und soll in Folgendem als solches bezeichnet werden.[1]) Es konnte nun der Kathode der Strom der Batterie, welcher bei diesen Versuchen bis zu Stärken von $\frac{1}{20}$ Daniell/S.-E. benutzt wurde, auf zweierlei Weise zugeleitet werden. Entweder derselbe mündete zwischen Kondensator und Dynamometer, er mufste alsdann das letztere durchfliefsen und brachte in demselben einen Ausschlag von vier bis fünf Skalenteilen hervor. Oder aber er mündete zwischen dem Dynamometer und dem Gasrohre, dann war nicht der mindeste Ausschlag des Dynamometers, sicherlich aber nicht ein Ausschlag von $\frac{1}{4}$ Skalenteil wahrzunehmen. Hätte nun aber der Strom aus einzelnen Partialentladungen sich zusammengesetzt, so hätte eine beständige Ladung und Entladung des Kondensators stattgefunden, also ein alternierender Strom das Dynamometer durchflossen. Die durch denselben verursachte Ablenkung hätte mindestens die Hälfte der durch den ganzen Strom hervorgerufenen betragen. Auch hier verursachte ich Intermittenz durch künstliche Unterbrechung im äufseren Schliefsungskreise, der Erfolg war, dafs nun bei beiden Arten der Schaltung Ablenkungen des Dynamometers eintraten, ja dieselben waren in beiden Fällen sogar gröfser (sechs bis acht Skalenteile), als wenn der Strom ungestört flofs. Dieser paradoxe Umstand erklärt sich dadurch, dafs

[1]) Siehe die Beschreibung der Vorrichtung in No. 11, S. 227.

Digitized by Google

bei künstlicher Unterbrechung dynamometrisch stärker wirksame Kondensatorentladungen eintraten, ohne dieselben aber nicht. Das hier angewandte Kriterium verliert nur dann seine Brauchbarkeit, wenn die einzelnen Partialentladungen sich so schnell folgen, dafs die denselben entsprechenden elektrischen Wellen den Silberdraht des Dynamometers in der Zwischenzeit nicht mehr zu durchsetzen vermögen. Wieviel derselben hierzu erforderlich seien, kann auf verschiedene Weise geschätzt werden, schon die niedrigste Schätzung ergiebt viele Tausend Millionen. Die einfachste Art ist vielleicht diese: Wenn die elektrische Welle sich nicht durch den Dynamometerdraht fortpflanzt, so besteht jede Partialentladung nur in der Entladung der auf der Kathode angesammelten Elektricität. Die Kapazität der Kathode war kleiner als die einer Kugel von 20 mm Radius. Das Potential der Kathode konnte während der Einzelentladung nicht um Werte schwanken, die viel mehr als $\frac{1}{100}$ Daniell auseinander lagen, denn wenn die mittlere Potentialdifferenz der Enden des Dynamometers diesen Wert erreichte, so trat eine wahrnehmbare Ablenkung ein. Um gleichwohl durch hinreichend schnell wiederholte Entladung der Kathode einen Strom von $\frac{1}{20}$ Dan./S.-E. zu erzeugen, mufsten sich zwei Billionen Entladungen in der Sekunde folgen. Diese Rechnung ist Einwänden zugänglich, aber ohne die grofse Zahl ängstlich verteidigen zu wollen, gebe ich zu bedenken, ob es wohl wahrscheinlich ist, dafs der elektrische Strom als vollständig ausgebildete Partialentladung mit allen Schichten ein 200 mm langes Gasrohr zu durchdringen vermag, in einer Zeit, in welcher er unfähig ist, 80 mm eines metallischen Leiters gleichförmig zu durchsetzen.

7. Ich habe keine Prüfungsmethode gefunden, welche zu weitergehenden Schlüssen hätte berechtigen können. Aber es sind noch einige Erfahrungen anzuführen, welche, wenn auch an sich nicht beweisend, doch in demselben Sinne sprechen, wie die bisher mitgeteilten.

a) Schliefst man den Stromkreis, in welchen das Gasrohr und ein hinreichender Flüssigkeitswiderstand eingeschaltet ist, durch den Körper, so erhält man beim Schliefsen einen Schlag, einen viel schwächeren Schlag beim Öffnen, durch häufiges Öffnen und Schliefsen kann die Empfindung bis zur Unerträg-

Digitized by Google

lichkeit gesteigert werden. Aber während das Rohr gleichförmig leuchtet, empfindet man nichts aufser einem Brennen in den Eintrittstellen des Stromes.

b) Niemals treten bei der Batterieentladung rekurrente Ströme als Nebenerscheinung auf, auch nicht unter Bedingungen, welche für das Zustandekommen derselben sehr günstig sind, und unter welchen die Ruhmkorffentladung sehr lebhafte Ströme dieser Art veranlafst.

c) Die folgenden Erfahrungen sind schon von Hrn. Hittorf angezogen: Bei einem hinreichend grofsen Widerstande der Leitung ist die Entladung sicher diskontinuierlich. Das Rohr läfst dann häufig einen Ton hören, dessen Höhe das Tempo angiebt, in welchem sich die Entladungen folgen. Wird der Widerstand verkleinert, so wird der Ton höher und die Erscheinung ein wenig lichtstärker. Aber ein allmählicher Übergang an die ruhige unempfindliche Entladung findet nicht statt, sondern bei einem bestimmten Widerstande verlischt der Ton sprungweise, die Erscheinung verdreifacht ihren Glanz, und es lassen sich derselben nun keinerlei Anzeichen von Diskontinuität mehr abgewinnen. Auffallender ist der Sprung, wenn die Elektroden des Rohres mit den Belegen eines grofsen Kondensators verbunden sind; er findet dann häufig schon statt von einem Zustande aus, in welchem die einzelnen Entladungen sich noch durch das Auge unterscheiden lassen. Ist der Sprung einmal eingetreten, so übt dann die Einschaltung oder Ausschaltung des Kondensators nicht mehr den mindesten Einfluſs auf das Aussehen der Entladung aus.

Ich schliefse aus der Gesamtheit der mitgeteilten Versuche, dafs die geprüften Entladungen kontinuierliche waren; ich folgere daraus, dafs im allgemeinen die Batterieentladung als kontinuierlich zu betrachten sei, sobald sie nicht durch die bekannten Merkmale Diskontinuität verrate und weiter, dafs auch die Entladungen des Induktoriums, deren Dauer je nach der Gröfse des Apparates zwischen $\frac{1}{1000}$ und $\frac{1}{60}$ Sekunde liegen kann, während dieses Intervalles als kontinuierlicher Strom anzusehen seien.

Um den gemachten Schlüssen volle Kraft zu geben, ist es nötig, zu zeigen, dafs den Betrachtungen, welche zu dem entgegengesetzten Resultate führen, volle Beweiskraft nicht

Digitized by Google

beigelegt werden kann. Diese Betrachtungen scheinen vorzugsweise zu beruhen 1) auf der Erfahrung, dafs ein schwacher Strom (wie ihn beispielsweise die Influenzmaschine liefert) allemal diskontinuierlich ist, und auch dann nicht kontinuierlich wird, wenn sich mehrere tausend Partialentladungen in der Sekunde folgen; 2) auf der Erfahrung, dafs die Wärmeentwickelung in einem Gasrohre der Intensität des Stromes, nicht dem Quadrat derselben proportional ist; 3) auf der damit zusammenhängenden Erfahrung, dafs die Potentialdifferenz an den Enden des Rohres nicht steigt mit steigender Stromstärke, sondern auf dem Werte verharrt, bei welchem überhaupt der schwächste Strom das Rohr zu durchsetzen vermag. Dafs diese Erfahrungen einen Schlufs auf notwendige Diskontinuität nicht zulassen, zeige ich, indem ich eine einfache mechanische Vorrichtung angebe, welche in mancher Beziehung, jedenfalls aber in den angeführten, als Elektricitätsleiter ein Gasrohr zu ersetzen vermag, und in welcher dennoch unter Umständen der Strom kontinuierlich fliefst. Es stelle A (Fig. 29) die Anode vor, es sei mit derselben elastisch und gut leitend das Gewicht α verbunden, welches der Kathode B nahe gegenüber liegt. Besteht nun zwischen A und B eine Potentialdifferenz, so wird α von B angezogen, es werde aber α an direkter Berührung mit B gehindert durch den mit α verbundenen Überzug β von relativ grofsem Widerstande w. Neben der beschriebenen Vorrichtung mögen sich zwischen A und B noch unzählig viele ähnliche befinden, welche sich von der ersteren nur dadurch unterscheiden, dafs der β entsprechende Widerstand für jede einzelne sehr grofs sei. Die Potentialdifferenz zwischen A und B, welche nötig ist, um die Gewichte α sowohl der ersten, als aller übrigen Vorrichtungen mit B in Berührung zu bringen, sei bis auf ein sehr kleines dieselbe und gleich p. Die ganze Vorrichtung kann dann ein Gasrohr ersetzen in folgender Hinsicht. Sie läfst überhaupt keinen Strom hindurch, so lange nicht die Potentialdifferenz von A und B den Wert p erreicht. Sie wird einen intermittierenden Strom durchlassen, sobald A und B mit einer Elektricitätsquelle verbunden werden, welche zwar

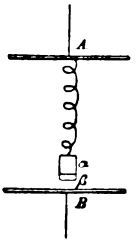


Fig. 29.

Digitized by Google

eine Potentialdifferenz p, nicht aber gleichzeitig einen Strom von der Stärke p/w hervorzubringen vermag. Ist aber die Quelle imstande, den genannten Strom zu liefern, so bleiben α und B dauernd in Berührung, und der Strom fliefst kontinuierlich. Welches nun auch die Stärke des Stromes sei, es wird doch die Potentialdifferenz nicht p übersteigen können, da sich immer mehr Leitungen schliefsen würden. Die gesamte Wärmeentwickelung wird daher auch der Intensität selbst, nicht dem Quadrate derselben proportional sein. Hiermit haben wir gezeigt, was unsere Absicht war.

Noch ein anderer Umstand scheint die Meinung der Autoren beeinflufst zu haben. Da nämlich die Lage und Entwickelung einer jeden Schicht des Glimmlichtes abhängt von der in der Richtung zur Kathode vorangegangenen Schicht, so bildet sich die berechtigte Anschauung, dafs auch zeitlich von der Kathode ab sich eine Schicht nach der anderen entwickeln müsse. Eine solche zeitliche Entwickelung aber ist nicht denkbar, falls die Entladung in allen Teilen eine kontinuierlich andauernde ist. Vielleicht kann man dem in Frage stehenden Umstande gerecht werden, wenn man zugiebt, dafs die Entladung als Ganzes kontinuierlich ist, aber annimmt, dafs der Verlauf derselben in den einzelnen Stromfäden allerdings eine Funktion der Zeit sei. Leitete beispielshalber die Berührung eines jeden Gasmoleküles mit der Kathode eine elektrische Bewegung ein, welche sich wellenartig in das Medium ausbreitete, so wäre eine successive Entstehung der Schichten wohl verständlich, ohne dafs sich deshalb die Entladung in Partialentladungen zerfällen liefse. Dieselbe wäre immer noch kontinuierlich im Sinne der vorliegenden Arbeit.

II. Bezeichnen die Kathodenstrahlen die Bahn des Stromes?

Von der Kathode gehen bekanntlich geradlinig, angenähert senkrecht zur Kathode, unbekümmert um die Lage der Anode die Kathodenstrahlen aus, welche sich je nach der Dichte des Gases um einige Millimeter, Centimeter und selbst um Längen von der Ordnung eines Meters in das Medium fortpflanzen. In Luft sind dieselben blau, bei sehr kleinen Dichten aber äufserst lichtschwach, sie sind dann vorzüglich bemerkbar durch die Phosphorescenz, welche sie an ihren Enden im Glase

Digitized by Google

erregen. Nähert man dem Rohre einen Magnet, so erscheinen sie gebogen, angenähert in der Gestalt, welche ein vom Strome durchflossener, elastischer, an der Kathode befestigter Draht unter dem Einflusse des Magnetes annehmen würde. Diese Einwirkung ist ganz allgemein als eine elektrodynamische aufgefafst, und so war die von den älteren Physikern, abgesehen von vorübergehend geäufserten Zweifeln, angenommene Ansicht diese: Die Kathodenstrahlen bezeichnen den Weg des Stromes, ihr blaues Licht rührt her von dem Glühen, resp. Phosphoreszieren der Gasteilchen unter dem Einflusse des Stromes. Diese Anschauung aber führte nach genauerer Erkenntnis der Thatsachen zu grofsen Unwahrscheinlichkeiten, und so äufsern sich denn neuere Arbeiten zum Teil sehr reserviert über die Beziehung der Kathodenstrahlen zum eigentlichen Entladungsvorgang.[1]) Unter diesen Umständen erschien es wünschenswert, einen sicheren experimentellen Entscheid zu erhalten auf die Frage: Durchläuft der Strom die Länge der Kathodenstrahlen, ehe er sich zur Anode wendet? War diese Frage in negativem Sinne zu beantworten, so war überhaupt die Bahn des Stromes dem bloſsen Auge nicht erkenntlich, es trat dann die neue Frage auf: Welches ist die Bahn des Stromes in einem Raume, in welchem dem Strome verschiedene Wege zur Verfügung stehen? Ich habe die letztere und damit die erstere Frage zu beantworten versucht, indem ich experimentell die Stromlinien in einem durchströmten Gasraume bestimmte aus den Ablenkungen, welche die Entladung auf einen kleinen, in ihrer Nähe befindlichen Magnet ausübte.

Ehe diese Versuche in Angriff genommen werden konnten, war es nötig, eine Vorfrage zu erledigen. Bilden nämlich die Kathodenstrahlen auch nicht den Weg des Stromes, so ist es doch unzweifelhaft, dafs dieselben vom Magnet beeinflufst werden. Es ist deshalb von vornherein nicht unwahrscheinlich, dafs in jedem Falle auch umgekehrt die Kathodenstrahlen eine Ablenkung des Magnetes veranlassen; diese Wirkung könnte ja von einer elektrodynamischen verschieden sein. Wäre eine solche vorhanden, so würde sie die beabsichtigten Versuche

[1]) Z. B. W. Spottiswoode and J. Fletcher Moulton, Phil. Trans. Bd. 171, S. 649, 1880.

Digitized by Google

vereiteln. Die zunächst zu beschreibenden Versuche sollen zeigen, dafs eine solche Wirkung nicht besteht.

In ein 300 mm langes Rohr von 28 mm Weite war als Kathode eine kreisförmige, abgedrehte Messingscheibe, welche den Querschnitt des Rohres füllte, eingesetzt, durch die durchbohrte Mitte dieser Scheibe war ein Thermometerrohr geführt, in welchem wiederum, genau zentrisch zur Scheibe ein Draht von unmagnetischem Metalle sich befand, dessen in den Gasraum nur wenig über die Scheibe hervorragendes Ende die Anode bildete. Die den Strom zu- und ableitenden Drähte waren um einander geschlungen. Es mufsten nun die Stromlinien in dem Gasraume jedenfalls symmetrisch zur Axe des Rohres liegen; denkt man sich also die Ströme ersetzt durch magnetische Flächen, so bilden dieselben durchaus geschlossene Ringmagnete, deren Wirkung nach aufsen Null sein mufste. Die Kathodenstrahlen aber waren voll entwickelt und füllten je nach der Dichte das ganze Rohr oder einen Teil desselben mit blauem Lichte. Haben dieselben also eine ihnen eigentümliche Wirkung auf einen aufserhalb befindlichen Magnet, so mufste dieselbe hier getrennt von jeder elektrodynamischen Wirkung zur Erscheinung kommen. Das Rohr war zur Vermeidung elektrostatischer Einflüsse umgeben mit einer abgeleiteten Staniolhülle, ohne welche Vorsicht die Versuche sich als unmöglich erwiesen. Der Magnet, auf welchen die Kathodenstrahlen wirken sollten, war derselbe, welcher bei den folgenden Versuchen benutzt wurde, er bestand in einem 12 mm langen, stark magnetischen Stückchen einer Taschenuhrfeder, er war aufgekittet auf ein Spiegelchen von sehr dünnem Glase, welches an einem einfachen Spinnenfaden in dem sehr engen Raume zwischen zwei Platten von Birminghamglas aufgehängt war. Er glich also dem Systeme eines Thomson'schen Galvanometers; war er durch äufsere Magnete, wie immer in den folgenden Versuchen, stark astasiert, so war er durch Luftdämpfung aperiodisch und genügte doch in Bezug auf Sicherheit der Einstellung etc. selbst strengen Ansprüchen. In möglichster Nähe dieses Magnetes wurde nun das vorerwähnte Rohr aufgestellt, einmal so, dafs der Magnet eine tangentiale, dann so, dafs derselbe eine radiale Kraft anzeigen mufste, endlich so, dafs eine Kraft parallel der Richtung des Rohres

Digitized by Google

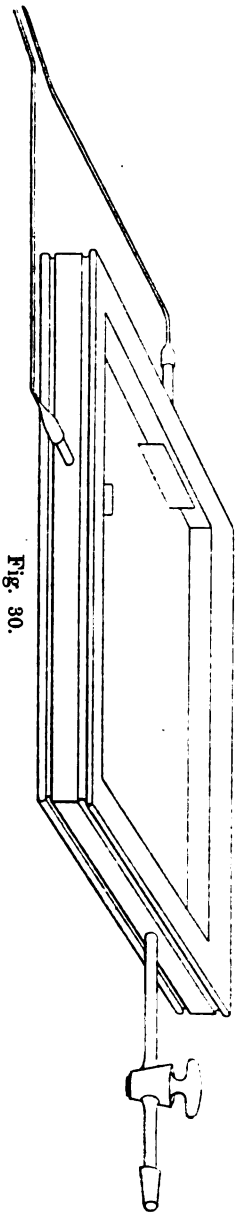


Fig. 30.

bemerkbar geworden sein würde. Aber niemals zeigte sich eine Ablenkung, die im Fernrohre auch nur $\frac{1}{10}$ Skalenteil betragen hätte. Wurde aber der gleiche Strom — seine Stärke war etwa $\frac{1}{100}$ bis $\frac{1}{200}$ Dan./S.-E. — unter Benutzung einer zweiten Anode veranlafst, das Rohr der Länge nach zu durchsetzen, so ergaben sich Ablenkungen von 30 bis 40 Skalenteilen. Gleiche Ablenkungen ergaben sich, wenn unter Beibehaltung der ersten Anode äufsere Teile des Schliefsungskreises dem Magnete bis auf einige Centimeter genähert wurden. Hiernach stand fest, dafs, wenn überhaupt eine spezifische Einwirkung der Kathodenstrahlen auf den Magnet stattfand, diese doch nicht den 300. Teil derjenigen Wirkung erreichen konnte, welche den Kathodenstrahlen als Stromträgern zukam.

Bei den Hauptversuchen wurde nun die Entladung untersucht in einem parallelepipedischen, plattenförmigen Luftraume von 120 mm Länge, 120 mm Breite und 10 mm Dicke. Das Gefäfs, welches diesen Luftraum umschlofs, ist in Fig. 30 dargestellt. Es wurde gebildet aus einem gegossenen, starken Messingrahmen, welcher als Gerüst diente und zugleich die Seitenwände hergab, und zwei luftdicht auf diesem Rahmen aufliegenden Platten von Spiegelglas von 4 bis 5 mm Stärke. Die letzteren trugen den gewaltigen Druck der Luft mit Sicherheit, konnten auch, während derselbe auf ihnen lastete, erhitzt werden, sie bogen sich aber so stark unter demselben, dafs die Krümmung bei seitlichem

Digitized by Google

Überblicken der Platte leicht bemerkt werden konnte. Den Messingrahmen durchsetzte ein mit Hahn versehenes Rohr zum Auspumpen und mehrere Aluminiumelektroden, letztere waren in Glasröhren eingekittet und so von dem Rahmen isoliert. Das Dichten des Gefäfses gelang erst nach einigen vergeblichen Versuchen. Die Schwierigkeit bestand einmal darin, dafs wegen der Durchbiegung des Glases ein genaues Aufschleifen unmöglich war, und jeder feste Kitt beim Auspumpen Sprünge erhielt, und zweitens darin, dafs in den inneren Raum durchaus keine Spur zersetzbarer organischer Substanz kommen durfte, also auch die reichliche Benutzung von Fett ausgeschlossen war. Die schliefslich benutzte Dichtung wird durch Fig. 31 erläutert. Auf dem abgeschliffenen vorspringenden inneren Rande α des Rahmens wurde ein Streifen dünner ausgewalzter Guttapercha gelegt, welcher sich von der Innenkante um die Breite eines Millimeters entfernt hielt.

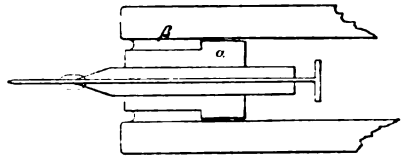


Fig. 31.

Dann wurden die Glasplatten erhitzt aufgelegt, und soweit es die mangelhafte Dichtung gestattete, das Gefäfs ausgepumpt; gleichzeitig wurde dann der Hohlraum β mit einer erwärmten Mischung von vier Teilen Kolophonium und einem Teile Baumöl ausgegossen. Diese Masse erwies sich nach dem Kaltwerden als hinreichend flüssig, um den Bewegungen der Glasplatten zu folgen, und doch als so zäh, dafs sie erst im Laufe von Monaten durch ihre eigene Schwere wieder aus dem Hohlraume ausfloſs. Das Gefäfs hielt sich tagelang völlig luftleer; durchsetzte allerdings der Strom dasselbe längere Zeit, so stieg der Gasdruck ein wenig, aber nicht so stark, dafs dadurch die beabsichtigten Versuche beeinträchtigt worden wären. Das Gefäfs wurde sodann mit einer vom Rahmen und den Elektroden isolierten, mit der Erde aber leitend verbundenen Staniolhülle umgeben. Nachdem es bis auf wenige Hundertstel Millimeter Druck entleert war, wurde es auf ein durch Stellschrauben in horizontale Stellung zu bringendes Brett gelegt, welches mit Koordinatenpapier überzogen war. Genau über dem Nullpunkte dieses

Digitized by Google

Koordinatensystemes schwebte die schon oben beschriebene Magnetnadel in solcher Höhe, dafs eben das entleerte Gefäfs unter ihr, ohne anzustofsen, verschoben werden konnte. Sie befand sich nur 2 mm über der Oberfläche der oberen Spiegelplatte, also 12 mm über der Mittelschicht des durchströmten Gasraumes. Beim Einsetzen des Stromes wurde die Nadel abgelenkt, die Gröfse dieser Ablenkung hing ab von der Stromstärke und der Stellung der Nadel zur Strombahn; bei den Versuchen hatte der Gesamtstrom eine Stärke von $\frac{1}{100}$ bis $\frac{1}{200}$ Dan./S.-E., dabei zeigte die Nadel in günstigster Stellung Ablenkungen bis zu 80 Skalenteilen. Da $\frac{1}{10}$ Skalenteil abgelesen werden konnte, handelte es sich um genau messbare Gröfsen. Mit Hilfe des Koordinatenpapieres liefs sich die Lage der Platte zum Magnete in genau angebbarer Weise variieren; es ist klar, dafs diese Anordnung erlaubte, mit einiger Genauigkeit die Verteilung der magnetischen Kräfte zu bestimmen, welche die Strömung in der Luftplatte dicht oberhalb dieser Platte und parallel mit derselben hervorrief. Es handelt sich aber darum, aus dieser Verteilung auf die Verteilung der Strömung in der Luftplatte zu schliefsen.

Dies geschieht mit Hilfe des folgenden Satzes: Die Strömungsfunktion der elektrischen Strömung in einer ebenen Platte ist gleich der mit einer Konstanten multiplizierten Potentialfunktion der von der Strömung hervorgerufenen magnetischen Kräfte in unmittelbarer Nähe der Platte. Die Strombahnen fallen also zusammen mit den Niveaulinien jenes Potentiales, und die Stromintensitäten zwischen je zwei Niveaulinien, zwischen welchen das Potential um den gleichen Wert wächst, sind gleich. Man findet diesen Satz unter anderem bewiesen in Maxwell's Treatise on electricity and magnetism[1]), man macht sich denselben aber auch ohne Rechnung leicht klar, wenn man bedenkt, dafs ein Magnetpol, welcher einer ebenen durchströmten Platte unbegrenzt genähert wird, nur von denjenigen Stromteilen, welche in seiner unmittelbaren Nähe liegen, eine zu Platte parallele Kraft erfährt.

Die in unserem Falle untersuchte Stromplatte ist nicht unendlich dünn, und der prüfende Magnet schwebt nicht in

[1]) Vol. II. p. 264. 1873.

Digitized by Google

unmittelbarer Nähe ihrer Mittelebene, sondern 12 mm über der letzteren. Es kann daher mit seiner Hilfe nur die Verteilung des Potentiales in einer Ebene erforscht werden, welche 12 mm über der Mittelebene der Luftschicht liegt. Aber die magnetischen Kräfte in dieser Ebene werden denjenigen im Inneren der Luftschicht nahezu gleich sein, es werden daher auch die Niveaulinien des Potentiales in derjenigen Ebene, in welcher der Magnet beweglich ist, den Stromlinien äufserst ähnlich sein. Die eleganteste Methode, diese Niveaulinien zu erforschen, bestände darin, dafs man die Platte in solcher Weise unter dem Magnet verschöbe, dafs der letztere beständig unabgelenkt bliebe; die Linie, welche die Projektion des Magnetes auf die Platte dabei beschreibt, ist eine Niveaulinie, also eine Stromlinie. Da aber die Ablenkung des Magnetes aus der Entfernung mit Spiegel und Skala abgelesen werden mufste, so war diese Methode nicht ohne weitläufige Mechanismen anzuwenden. Es wurde deshalb das folgende Verfahren eingeschlagen. Die Platte wurde so unter dem Magnet verschoben, dafs die Projektion des letzteren auf sie eine Parallele zu einer Seite der quadratischen Platte beschrieb, und dafs der Magnet dabei in seiner unabgelenkten Lage senkrecht zu dieser Parallelen stand. Für eine Reihe von Punkten dieser Geraden wurden dann die Ablenkungen bestimmt, welche das Einsetzen des immer auf gleicher Stärke gehaltenen Stromes veranlafste. Dieselben waren proportional dem Differentialquotienten des Potentiales längs der untersuchten Geraden. Diese Differentialquotienten wurden dann graphisch aufgetragen, nach bestem Ermessen interpoliert und durch mechanische Integration der erhaltenen Kurve die Änderung des Potentiales längs der untersuchten Geraden bestimmt. Das gleiche Verfahren wurde auf eine Reihe von Geraden, welche der ersten parallel waren, und auf eine dazu senkrechte Gerade angewandt. Es ist klar, dafs dadurch schon der Wert des Potentiales für alle Punkte der untersuchten Ebene angebbar wurde, und dafs es dann leicht war, Punkte mit gleichem Werte des Potentiales zu verbinden und diese Verbindungslinien in solchen Abständen zu ziehen, dafs von der einen zur anderen das Potential um gleiche Werte wuchs. Indessen infolge der Methode mufste notwendig den erhaltenen Werten eine gewisse Unsicherheit anhaften,

Digitized by Google

und es war erforderlich, ein Maſs für diese zu gewinnen. Zu dem Ende wurde nicht nur für eine Gerade, welche zu den zuerst untersuchten Parallelen senkrecht war, der Lauf des Potentiales ermittelt, sondern für mehrere solcher Geraden. Es konnte dann der Wert des Potentiales für einen jeden Punkt auf ebenso viele unabhängige Weisen ermittelt werden, und es wurde durch Ausgleichung nicht nur ein zuverlässigeres Resultat erhalten, sondern auch ein Maſs der Unsicherheit gegewonnen. Es zeigte sich, daſs dieselbe nicht so groſs war, daſs sie die Resultate hätte wesentlich beeinträchtigen können.

Diese Resultate lassen sich nicht besser darstellen, als durch die Figg. 32a, b, c. In denselben beizeichnet α das blaue Kathodenlicht, β die positiven Schichten; die ausgezogenen Liniensysteme sind äquidistante Nieveaukurven des Potentiales. In a und c beträgt der Druck gegen $\frac{1}{10}$ mm, daher münden hier die Kathodenstrahlen frei, in b ist der Druck so klein gemacht, daſs die Batterie nur eben noch den Raum kontinuierlich zu durchsetzen vermochte, es treffen daher hier die Kathodenstrahlen senkrecht auf die gegenüberliegende Wand. In Bezug auf die Bedeutung der gezeichneten Niveaukurven sind folgende Bemerkungen zu machen: 1) Zur Konstruktion einer jeden Figur wurden etwa 50 bis 60 Ablenkungen verwendet, die sich nicht gleichmäſsig über die ganze Fläche verteilten, sondern sich auf diejenigen Gegenden konzentrierten, welche als die wichtigsten erschienen. 2) Die Unsicherheit, welche blieb, ist durch die Zahl der gezeichneten Niveaukurven angedeutet. Von denselben sind nämlich so viele gezogen, daſs die Unsicherheit in der Lage der einzelnen etwa gleich dem Intervall zwischen zwei benachbarten ist.

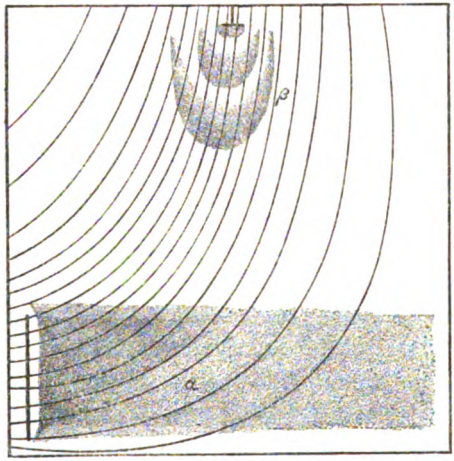


Fig. 32a. ($\frac{1}{2}$ nat. Gr.)

Digitized by Google

3) Um aus den gezeichneten Niveaulinien die eigentlichen Stromlinien zu erhalten, mufs man sich die Endpunkte derselben auf die Elektroden vereinigt und die Linien selbst etwas mehr gegen diejenigen Stellen zusammengerückt denken, an welchen sie am dichtesten sind. Die eigentlichen Stromlinien können natürlich die Wände des Gefäfses nirgends schneiden, wie das die von uns gezeichneten Linien thun.

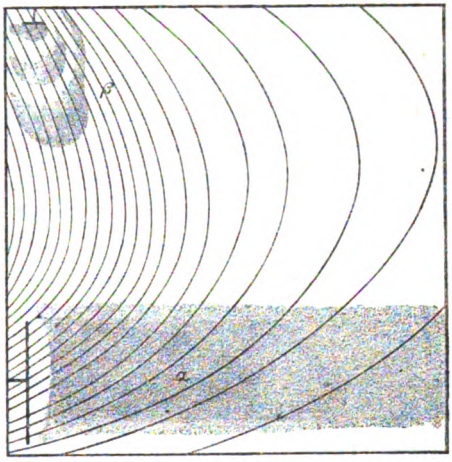


Fig. 32b. ($\frac{1}{2}$ nat. Gr.)

Die Betrachtung der Figuren ergiebt nun eindeutig das Folgende: die Richtung der Kathodenstrahlen fällt durchaus nicht mit der Stromrichtung zusammen. An einzelnen Stellen sind die Stromlinien fast senkrecht zur Richtung der Kathodenstrahlen. Einzelne Teile des Gasraumes sind lebhaft vom Kathodenlichte erhellt, obwohl in ihnen die Intensität der Strömung verschwindend klein ist. Die Strömung geht in roher Annäherung von Pol zu Pol in ähnlicher Verteilung, wie solche in einem festen oder flüssigen Leiter stattfinden würde. Daraus folgt, dafs die Kathodenstrahlen mit der Bahn des Stromes nichts gemein haben.

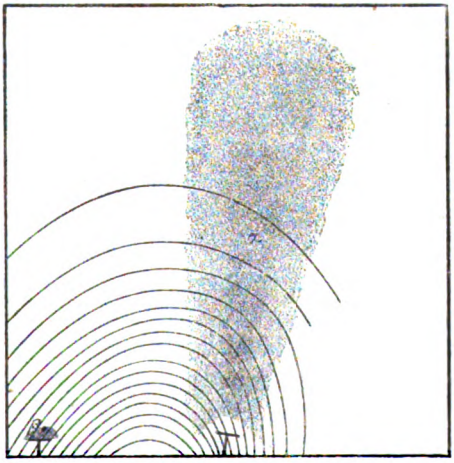


Fig. 32c. ($\frac{1}{2}$ nat. Gr.)

Digitized by Google

1. Gegen die Vorversuche wird man einwenden: da der Magnet die Kathodenstrahlen ablenke, so müssen auch rückwärts die Kathodenstrahlen den Magnet ablenken. Demgegenüber kann bestritten werden, dafs der Ausdruck „der Magnet lenke jene Strahlen ab", und der dadurch gegebene Vergleich mit der Ablenkung eines durchströmten elastischen Drahtes so passend gewählt sei, wie dies auf den ersten Blick den Anschein hat. Ein solcher Draht würde bei Beginn des Stromes gerade sein und erst nach einer endlichen Zeit in seine abgelenkte Lage gebracht werden. Wir wissen aber, dafs auch Kathodenstrahlen, welche Entladungen von weniger als ein Milliontel Sekunde Dauer angehören, schon vollständig gebogen erscheinen.[1]) Dafs die elektrodynamische Wirkung die Entladung in Gasen mit solcher Geschwindigkeit in Bewegung zu setzen vermöge, dagegen spricht die De la Rive'sche Rotation des Glimmlichtes um den Magnetpol; diese ist unzweifelhaft eine elektrodynamische Wirkung, aber sie erfolgt auch nur mit sehr messbarer Geschwindigkeit. Ferner wird bei jeder eigentlichen elektrodynamischen Wirkung das ponderable Substrat der Strömung in Bewegung gesetzt, bei der Ablenkung der Entladung aber nicht.[2]) Diese Ablenkung würde also vielmehr dem durch Hrn. Hall entdeckten Phänomen entsprechen. Aber auch diese Analogie wird mangelhaft, wenn man bedenkt, dafs ja die Kathodenstrahlen als Strombahn überhaupt nicht anzusehen sind. Endlich: dafs die Wirkung des Magnetes auf die Entladung nicht eine rein elektrodynamische sein kann, beweist die Thatsache, dafs die Annäherung eines kräftigen Magnetes imstande ist, die Batterieentladung auszulöschen, welche Entladung dann nach Entfernung des Magnetes sich sofort wieder entzündet. Die Wirkung des Magnetes, welche das Zustandekommen des Stromes verhindert, kann sicherlich nicht eine Wirkung auf den Strom sein, sondern nur eine Wirkung auf das zu durchströmende Medium. Diese Schwierigkeiten und die Thatsache, dafs die Kathodenstrahlen auf den Magnet nicht zurückwirken, scheinen mir die Wahrscheinlichkeit nahezulegen, dafs die Analogie

[1]) Siehe Goldstein, Über eine Form der elektr. Abstofsung. III. Teil.
[2]) Siehe Goldstein, Wiedemann's Ann. Bd. 12, S. 262, 1881.

Digitized by Google

zwischen der Ablenkung der Kathodenstrahlen und der elektrodynamischen Wirkung eine ganz äufserliche sei. Man entgeht jenen Schwierigkeiten und findet diese Thatsache gerechtfertigt, wenn man, auf eine Erklärung einstweilen verzichtend, aussagt: der Magnet wirke auf das Medium, die Kathodenstrahlen aber pflanzten sich anders fort in einem magnetisierten als in einem unmagnetisierten Medium. Ihre Ablenkung ist alsdann dem Vergleiche mit der Ablenkung eines durchströmten Drahtes entzogen, vielmehr in Analogie gestellt mit der Drehung der Polarisationsebene des Lichtes in einem magnetisierten Medium.

2. Die Hrn. E. WIEDEMANN und GOLDSTEIN haben, wie mir scheint, auf Grund triftiger Erwägungen, ihre Ansicht dahin ausgesprochen, dafs die Entladung eine an sich unsichtbare Bewegung des Äthers sei, welche sich in Licht nur dadurch umsetze, dafs sie ihre Energie zunächst an die Gasteilchen abgebe. Ich wünschte indes, hierin an Stelle des Wortes „Entladung“ das Wort „Kathodenstrahl“ gesetzt zu sehen, welche Begriffe den genannten Forschern zusammenfielen, in Wahrheit aber strenge zu trennen sind. Der Ansicht, dafs die Kathodenstrahlen an sich lichtlos seien und nur durch ihre Absorption im Gase Licht erzeugen, wird man sich kaum erwehren können, wenn man aufmerksam den folgenden Versuch erwägt. Das schon früher beschriebene Rohr, welches zu den Vorversuchen dieses Abschnittes gedient hatte, wurde so weit evakuiert, dafs nur die Entladungen eines grofsen Induktoriums noch hindurchgingen, und dafs unter der Einwirkung solcher Entladungen an dem der Kathode gegenüberliegenden Ende helle Phosphorescenz auftrat. Nach dem Vorherigen kann man nicht zweifeln, dafs sich die Strombahnen auf die nächste Umgebung der dicht beisammenliegenden Elektroden beschränken, und dafs nur die Kathodenstrahlen es sind, welche das Rohr der Länge nach durchsetzen. Es befand sich nun in dem Rohre an dem phosphorescierenden Ende ein Quecksilbertropfen. Wurde durch Erhitzen des Rohres an dieser Stelle das Queksilber verdampft und dadurch ein Gas von gröfserer Dichte daselbst erzeugt, so füllte sich das Ende des Rohres mit rosaweifsem Lichte, welches das Quecksilberspektrum zeigte. Die grüne Phosphorescenz des Glases erblafste dabei und hörte ganz auf, wenn die durchstrahlte Schicht von

Digitized by Google

Quecksilberdampf eine gewisse Dicke erreichte. Wurde durch den Magnet den Kathodenstrahlen ein Weg gewiesen, bei welchem sie nicht den Dampf zu durchsetzen hatten, so hörte der letztere auf zu leuchten, und es erschien dafür die Stelle der seitlichen Glaswand, auf welche nun die Strahlen fielen, in grünem Phosphorescenzlichte. Man konnte so beliebig das Glas oder den Quecksilberdampf leuchten lassen. Füllte sich dann durch weiteres Erhitzen und Destillieren ein immer gröfserer Teil des Rohres mit dem dichteren Dampfe, so leuchtete von dem dampferfüllten Teile immer nur die der Kathode zunächst gelegene Strecke auf eine Länge von 5 bis 6 cm, der dahinter gelegene Teil des Rohres blieb dunkel. War schliefslich das ganze Rohr mit dem dichteren Dampfe gefüllt, so umgab das Leuchten als gewöhnliches Kathodenlicht die Kathode bis auf eine Entfernung von einigen Centimetern. Es erregen also die Kathodenstrahlen das Leuchten da, wo sie zuerst auf ein dichteres Medium treffen und von demselben absorbiert werden, zu ihrer Absorption reicht eine verschwindend dünne Schicht eines festen Körpers aus, aber es ist eine Schicht von endlicher Dicke eines Gases hierzu erforderlich. Je dichter das Gas, auf eine um so kürzere Strecke vermögen die Kathodenstrahlen dasselbe zu durchdringen, dies ist vermutlich einer der Gründe, aus welchen in dichteren Gasen das Kathodenlicht sich auf die nächste Nähe der Kathode beschränkt.

3. Bei dem vorigen Versuche konnte man nicht zweifelhaft sein, dafs das Gas auch dann, wenn es in unmittelbarer Nähe der Kathode leuchtete, doch nicht leuchtete unter dem Einflusse des Stromes, sondern unter dem Einflusse der Kathodenstrahlen. Denn dies Leuchten konnte durch unmerkliche Übergänge übergeführt werden in ein ganz ähnliches Leuchten, welches in grofsem Abstande von der Kathode stattfand in einem Raume, in welchem der Strom Null war. Es ist aber sehr unwahrscheinlich, dafs in diesem besonderen Falle zwar das Kathodenlicht keine direkte Wirkung des Stromes sollte gewesen sein, dafs dies aber im allgemeinen der Fall sein sollte. Da ferner nach den Untersuchungen des Hrn. Goldstein das Kathodenlicht so viele Analogieen mit den einzelnen positiven Schichten zeigt, dafs es selbst als eine degenerierte

Digitized by Google

solche Schicht angesehen werden kann, so ist es sehr unwahrscheinlich, dafs das Leuchten der Gase in den positiven Schichten ganz andere Ursachen haben sollte, als das Leuchten im Kathodenlichte. Man wird so zu der anfangs gewagt scheinenden Annahme geführt, dafs das Leuchten des Gases in der Glimmentladung überhaupt keine unmittelbare Wirkung des Stromes sei, sondern mittelbar entstehe durch Absorption der durch den Strom erzeugten Kathodenstrahlen.[1]) Könnten wir die Entstehung der Kathodenstrahlen verhindern, so wäre das Gas überall so dunkel wie in den doch auch vom Strome durchflossenen dunklen Zwischenräumen der Schichten, könnten wir umgekehrt Kathodenstrahlen erzeugen auf anderem Wege als durch die Entladung, so könnten wir das Gas erleuchten auch ohne Strom. Einstweilen ist allerdings diese Trennung nur in der Vorstellung ausführbar.

4. Eine Reihe von Erscheinungen, welche anders nur schwer zu erklären sind, stellen sich fast als selbstverständlich dar, wenn man die Kathodenstrahlen als eine von der eigentlichen Entladung gänzlich unabhängige Bewegung auffafst, welche mit derselben nicht mehr zusammenhängt, als das Licht, welches von der Entladung ausstrahlt. Ich nenne nur die Durchdringung der Schichten, die Reflexion der Kathodenstrahlen von der Anode, das Heraustreten dieser Strahlen aus engen Metallgittern, welche die Anode bilden und die Kathode vollständig umgeben. Ich sah unter diesen Umständen voll entwickelte Kathodenstrahlen durch ein Drahtgitter treten, welches nicht weniger als 36 Maschen auf den Quadratmillimeter hatte.

III. Haben die Kathodenstrahlen elektrostatische Eigenschaften?

Giebt man zu, dafs die Kathodenstrahlen nur eine Begleiterscheinung des eigentlichen Stromes sind, und dafs dieselben elektrodynamische Wirkungen nicht ausüben, so ist wohl die nächstliegende Frage die nach ihrem elektrostatischen Ver-

[1]) d. h. von Strahlen, welche ihrer Natur nach identisch sind mit den Kathodenstrahlen. Der Name wird offenbar unpassend, wenn er auch die Strahlen der positiven Schichten umfassen soll.

Digitized by Google

halten. Leider konnte ich die darauf bezüglichen Versuche nicht mehr mit der Batterieentladung ausführen, sondern mufste mich mit den Entladungen eines kleinen Induktoriums behelfen. Da die letzteren wegen ihrer Unregelmäfsigkeit und der Plötzlichkeit ihres Verlaufes zu elektrostatischen Messungen sehr ungeeignet sind, so erhielten die Versuche nicht die Schärfe, deren sie sonst vielleicht fähig gewesen wären, doch darf das Hauptresultat wohl als feststehend betrachtet werden. Die in der Überschrift aufgeworfene Frage kann in zwei einfachere zerlegt werden, nämlich erstens: Veranlassen die Kathodenstrahlen das Auftreten elektrostatischer Kräfte in ihrer Umgebung? und zweitens: Werden sie selbst in ihrem Verlaufe beeinflufst durch äufsere elektrostatische Kräfte? Unter Kathodenstrahlen sind hier durchaus solche zu verstehen, welche von der sie erzeugenden Strombahn getrennt sind, dieselben sollen der Einfachheit halber als reine bezeichnet werden.

A. Auf die erstgenannte Frage wurde eine Antwort gesucht mittels der in Fig. 33 dargestellten Anordnung. AB ist das 25 mm weite, 250 mm lange Glasrohr, in welchem der Strahl erzeugt wurde, α ist die Kathode; alle mit β bezeichneten Teile sind gut metallisch miteinander verbunden und bilden, soweit sie im Inneren des Glasrohres liegen, die Anode. Sie bestehen erstens aus einem Messingrohre, welches die Kathode zum gröfsten Teile umgiebt und nur gegenüber derselben eine 10 mm im Durchmesser haltende, kreisförmige Oeffnung besitzt, durch welche die Kathodenstrahlen austreten können, zweitens aus einem Drahtnetze, dessen Maschen etwa 1 qmm bedecken, und durch welches die Kathodenstrahlen hindurchpassieren müssen, drittens aus einem metallischen Schutzkasten, welcher den gröfsten Teil des Glasrohres völlig umgiebt und verhindert, dafs in dem aufserhalb des Drahtnetzes gelegenen Teile des Gasraumes durch Influenz von aufsen, z. B. von der Kathode her, elektrostatische Kräfte auftreten können. Wenn die früher erhaltenen Resultate nur halbwegs Bedeutung haben, so sind die Kathodenstrahlen, nachdem sie die Mündung des Metallcylinders und obenein das Drahtnetz passiert haben, als rein zu betrachten. Sie sind aber deshalb nicht minder lebhaft, sondern lassen bei geringer Dichte die Glas-

Digitized by Google

wand bei B in lebhaftem, grünen Phosphorescenzlichte erglänzen, in welchem sich der Schatten des Drahtnetzes genau abzeichnet. Es war nun der in den Schutzkasten hineinragende Teil des Glasrohres umgeben mit einem metallischen Mantel γ, welcher mit dem einen Quadranten eines empfindlichen Elektrometers verbunden war, während der Schutzkasten mitsamt dem anderen Quadranten zur Erde abgeleitet wurde. Wurde in das Innere dieses Mantels eine auch nur kleine Menge Elektricität gebracht, so entzog dieselbe durch Influenz dem Elektrometer die entgegengesetzte Elektricität, sodafs ein Ausschlag erfolgte. Das Einbringen von Elektricität konnte z. B. in der Weise geschehen, dafs an Stelle des Glasrohres AB in das Innere des geschützten Raumes und des Mantels γ hineinragend ein Metallstab angebracht wurde, welcher ungefähr Gestalt und Lage des Kathodenstrahles hatte und mit der Kathode leitend verbunden war, während der Strom des Induktoriums wie bei den eigentlichen Versuchen das Rohr durchsetzte. Der Ausschlag, welchen das Elektrometer alsdann annahm, war zu grofs, um gemessen zu werden, er konnte aber geschätzt werden auf zwei bis drei Tausend Skalenteile. Wurde dann der Strom unterbrochen, so ging das Elektrometer nahezu in die alte Lage zurück, und dies Spiel konnte beliebig wiederholt werden. Quantitativ ähnliche Wirkungen hätte nun der Kathodenstrahl hervorbringen müssen, wenn er aus einem Strome von Teilchen, die auf das Potential der Kathode geladen waren, bestand, qualitativ ähnliche aber überhaupt dann, wenn er irgend elektrostatische Kräfte in seiner Umgebung erregte. Dies war nun

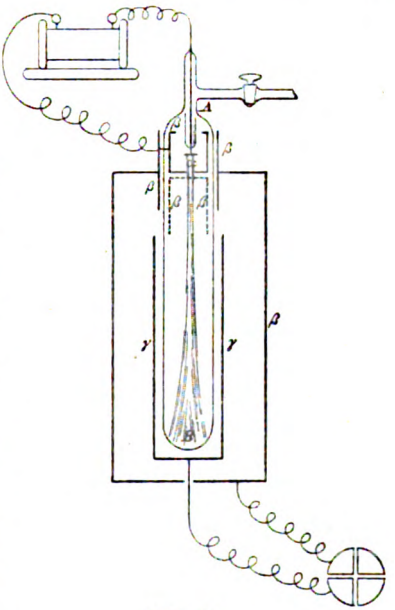


Fig. 33.

Digitized by Google

das Resultat des Versuches: Wurden die Quadranten des Elektrometers leitend verbunden und nun das Induktorium in Gang gesetzt, so blieb natürlich zunächst die Nadel in Ruhe, wurde nun die Verbindung der Quadranten gelöst, so fing infolge von Unregelmäfsigkeiten der Entladung die Nadel an, Schwankungen bis zu 10 bis 20 Skalenteilen um die Ruhelage zu machen, wurde dann das Induktorium unterbrochen, so blieb die Nadel ruhig auf ihrer Ruhelage, um beim Wiedereinsetzen des Stromes wieder um dieselbe zu schwanken u. s. w. Hieraus ist mit Sicherheit zu schliefsen, dafs, soweit die Genauigkeit des Versuches geht, sich eine elektrostatische Wirkung des Strahles nicht wahrnehmen läfst; insbesondere, dafs, falls derselbe aus einem Strome elektrisierter Teilchen bestand, dann das Potential auf seiner Mantelfläche doch höchstens $\frac{1}{100}$ desjenigen an der Kathode betrage. Dieser Schlufs bleibt genau bestehen, wenn sich nun auch zeigt, dafs der aufserhalb des Drahtnetzes gelegene Teil des Rohres keineswegs einfach unelektrisch ist, sondern dafs etwas kompliziertere Verhältnisse vorliegen. Setzt man nämlich das Induktorium in Bewegung, nachdem der Apparat durch lange Ruhe unelektrisch geworden ist, so erhält das Elektrometer eine bedeutende Ablenkung (150 bis 200 Skalenteile), eine negative Ladung des Glasrohres anzeigend. Aber diese Ladung und Ablenkung bleibt konstant, wenn man auch beliebig das Induktorium in Thätigkeit und aufser Thätigkeit setzt. Dieselbe hält stundenlang nach Unterbrechung des Apparates an. Die Stellung der Nadel verändert sich aber augenblicklich, wenn man während der Thätigkeit des Apparates dem Rohre einen Magnet nähert, um dann wieder in der neuen Lage konstant zu bleiben, solange der Magnet seine Lage beibehält. Es dringt also thatsächlich durch das Drahtnetz hindurch Elektricität in den geschützten Raum, solange bis das gesteigerte Potential das weitere Eindringen verhindert. Die Gesetze, welchen dies Eindringen unterliegt, sollen hier nicht festgestellt werden, es genügt, dafs dasselbe mit den Kathodenstrahlen nichts zu thun hat. Denn weder wird das Eintreten der letzteren irgendwie beeinträchtigt, wenn das weitere Eindringen der Elektricität verhindert ist, noch wird, wie der zuerst beschriebene Versuch zeigt, die Menge der im Glasrohre einmal vorhandenen Elektricität da-

Digitized by Google

durch um ein Bemerkbares vermehrt, dafs die Kathodenstrahlen den Raum zu durchströmen beginnen.

B. Um Aufschlufs zu geben, ob die reinen Kathodenstrahlen durch elektrostatische Kräfte beeinflufst würden, wurden die folgenden Versuche angestellt. Die Kathodenstrahlen wurden in einem 260 mm langen Glasrohre von einer kreisförmigen Aluminiumkathode von 5 mm Durchmesser aus erzeugt. Die Kathode war, ähnlich wie in den vorigen Versuchen, fast völlig von der Anode umgeben, und nur durch ein Drahtnetz traten die Strahlen nach aufsen. In ihren weiteren Weg war ein feiner Draht gestellt, dessen scharfer Schatten, in einer Entfernung von 120 mm im Phosphorescenzbilde erscheinend, ein genaues Merkmal einer etwaigen Ablenkung abgab. Es zeigte sich, dafs eine auf den Strahl senkrecht zu seiner Richtung wirkende magnetische Kraft, welche nur halb so grofs wie die horizontale Intensität des Erdmagnetismus war, hinreichte, die Lage dieses Schattens sehr merklich zu verändern. Das Rohr wurde nun zwischen stark und entgegengesetzt elektrisierte Platten gebracht, ohne dafs indes eine Einwirkung auf das Phosphorescenzbild sichtbar wurde. Es war aber hierbei zweifelhaft, ob die grofse elektrostatische Kraft, welcher das Rohr ausgesetzt war, im Inneren nicht kompensiert würde durch eine daselbst eintretende elektrische Verteilung. Um diese Zweifel zu heben, wurden im Inneren des Rohres zwei Metallstreifen in 20 mm Abstand angebracht, zwischen welchen auf eine Länge von 120 mm der Strahl von dem schattengebenden Draht aus hindurchgehen mufste, und welche durch Leitungen nach aufsen auf verschiedenes Potential gebracht werden konnte. Wurden dieselben zunächst mit den Polen einer Batterie von 20 kleinen Daniell'schen Elementen verbunden, so zeigte Schlufs und Öffnung dieser Verbindung nicht den mindesten Einfluſs auf das Phosphorescenzbild, also dafs eine auf den Strahl senkrecht zu seiner Richtung wirkende Kraft von einem Dan. auf 1 mm jedenfalls noch keine Wirkung auf denselben äufserte. Es wurden sodann 240 Planté-Elemente der grofsen Batterie geladen, und ihre Pole mit den beiden Metallplatten verbunden. Diese 240 Elemente waren allein durchaus nicht fähig, den Gasraum zu durchbrechen, sobald aber das Induktorium einsetzte, und die

Digitized by Google

Kathodenstrahlen den Raum zwischen den Platten erfüllten, entstand zwischen den Platten die Batterieentladung, welche, da kein Flüssigkeitswiderstand eingeschaltet war, sofort in Bogenentladung überging. Die gleiche Erscheinung konnte dann auch schon mit einer viel geringeren Zahl von Elementen, bis herab zu 20 bis 30 hervorgerufen werden. Dies entspricht einer von Hrn. Hittorf gemachten Entdeckung, wonach der von den Kathodenstrahlen erfüllte Raum schon sehr kleinen Kräften gegenüber durchlässig ist. Wurden die 240 Elemente mit einem grofsen Widerstande zwischen die Platten geschaltet, so ging nur während jeder einzelnen Entladung des Induktoriums eine ebenso kurz andauernde schwache Batterieentladung über. Dabei erschien dann das Phosphorescenzbild der Ruhmkorffentladung in der Nähe der negativen Platte durch Deflexion etwas verzerrt, der in der Mitte zwischen beiden Platten befindliche Schatten des Drahtes aber war nicht sichtbar verschoben. Man kann daher als Resultat angeben: Unter den Umständen des Versuches wurde der Kathodenstrahl durch keine elektromotorische Kraft abgelenkt, welche überhaupt in dem von ihm durchsetzten Raume zustande kommen kann, jedenfalls aber noch nicht durch eine elektromotorische Kraft von ein bis zwei Dan. auf das Millimeter. Hieran knüpfen sich die folgenden Bemerkungen.

1. Soweit die unter III beschriebenen, allerdings unvollkommenen Versuche ein Urteil zulassen, sind an den Kathodenstrahlen elektrostatische Eigenschaften nicht wahrzunehmen. Unter II wurde teils bewiesen, teils wahrscheinlich gemacht, dafs auch elektrodynamische Wirkungen im engeren Sinne von ihnen nicht ausgehen. Daher kann die Frage aufgeworfen werden, ob wir überhaupt berechtigt seien, die Kathodenstrahlen an sich als eine elektrische Erscheinung anzusehen? Es erscheint nicht als unwahrscheinlich, dafs dieselben ihrer Natur nach keine engeren Beziehungen zur Elektricität haben, als das Licht, welches von einer elektrischen Lampe ausgeht.

2. Die unter II mitgeteilten Versuche lassen sich ganz wohl mit der von verschiedenen Seiten vertretenen Ansicht vereinigen, nach welcher der Kathodenstrahl gebildet werden solle aus einem Strome elektrisierter materieller Teilchen. Aber die unter III erhaltenen Resultate scheinen einer solchen

Digitized by Google

Ansicht entgegenzutreten. Dafs sich die Kathodenstrahlen ganz unähnlich verhalten einem mit der Kathode verbundenen Stabe von gleicher Gestalt, ist wohl nahezu das Gegenteil von dem, was man nach jener Anschauung erwarten sollte. Man kann ferner fragen, wie grofs die Geschwindigkeit elektrisierter Teilchen sein müsse, damit eine senkrecht zur Bahn derselben wirkende magnetische Kraft von der absoluten magnetischen Intensität Eins stärker ablenkend wirke als eine elektrostatische Kraft von einem Dan. auf 1 mm. Man findet, dafs jene Geschwindigkeit elf Erdquadranten in der Sekunde übersteigen müsse. Ohne eine solche Geschwindigkeit anzunehmen, könnte jene Anschauung, nach dem unter B dargestellten Versuche, von der Einwirkung des Magnetes auf die Strahlen keine Rechenschaft ablegen, aber eine solche Geschwindigkeit wird man nicht für wahrscheinlich halten.

Schlufs.

Durch die beschriebenen Versuche glaube ich bewiesen zu haben:

1. Dafs bis zur Beibringung stärkerer Beweismittel für das Gegenteil wir die Batterieentladung als kontinuierlich, also die Glimmentladung nicht als notwendig disruptiv anzusehen haben.

2. Dafs die Kathodenstrahlen eine die Entladung nur begleitende Erscheinung sind, mit der Bahn des Stromes in erster Annäherung aber nichts zu thun haben.[1])

3. Dafs den Kathodenstrahlen entweder gar keine oder doch nur sehr schwache elektrostatische und elektrodynamische Eigenschaften zukommen.

Aufserdem aber habe ich versucht, eine ganz bestimmte Anschauung über das Wesen der Glimmentladung als wahrscheinlich hinzustellen, deren Hauptzüge diese sind:

Das Leuchten des Gases in der Glimmentladung ist kein Phosphoreszieren unter dem direkten Einflusse des Stromes,

[1]) Da das Vorhandensein der Kathodenstrahlen in einem Gasraume die Durchlässigkeit desselben wesentlich beeinflufst, so kann man kaum zweifeln, dafs in zweiter Annäherung die Lage und Entwickelung der Kathodenstrahlen auf die Bahn des Stromes mitbestimmend einwirkt.

Digitized by Google

sondern ein Phosphoreszieren unter dem Einflusse der durch den Strom erregten Kathodenstrahlen. Diese Kathodenstrahlen sind elektrisch indifferent, unter den bekannten Agentien ist das Licht die ihnen am nächsten verwandte Erscheinung. Die Drehung der Polarisationsebene des letzteren ist das Analogon zur Beugung der Kathodenstrahlen durch den Magnet.

Wenn diese Anschauung richtig ist, so ist man durch die Erscheinungen gezwungen, verschiedene Arten von Kathodenstrahlen anzunehmen, deren Eigenschaften ineinander übergehen, welche den Farben des Lichtes entsprechen und welche sich unterscheiden nach Phosphorescenzerregung, Absorbierbarkeit und Ablenkbarkeit durch den Magnet.

Die diesen Ansichten am nächsten stehenden früheren sind die von den Herren E. Wiedemann[1]) und E. Goldstein[2]) geäufserten. Wenn man die unten citierten Stellen mit dem Gegenwärtigen vergleicht, wird man ebenso leicht die Übereinstimmungen, wie die Abweichungen erkennen. Die beschriebenen Versuche wurden im physikalischen Institut der Universität Berlin ausgeführt.

---

[1]) Siehe Wiedemann's Ann. Bd. 10, S. 249, 1880.
[2]) Siehe Wiedemann's Ann. Bd. 12, S. 265, 1881.

Digitized by Google

14. Über das Verhalten des Benzins als Isolator und als Rückstandsbildner.

Aus WIEDEMANN's Annalen der Physik und Chemie. Bd. 20, S. 279—284, 1883.

Die Herren ROWLAND und NICHOLS[1]) haben gezeigt, dafs in gewissen isolierenden Krystallen die dielektrische Polarisation nicht von elektrischer Nachwirkung oder Rückstandsbildung begleitet ist; sie haben dieses Resultat gedeutet als günstig für diejenige Ansicht, nach welcher die Rückstandsbildung überhaupt nur eine notwendige Folge mangelhafter Homogeneität der Isolatoren darstellt. Vor einigen Jahren hatte ich in dem Wunsche, Rückstandsbildung in einem sicher homogenen Leiter nachzuweisen, verschiedene Flüssigkeiten darauf hin geprüft. Die meisten derselben erwiesen sich als viel zu gut leitend für solche Versuche, das käufliche reine Benzin aber zeigte hinreichenden Widerstand und liefs gleichzeitig einen nicht unbeträchtlichen Rückstand bemerken. Bei näherer Untersuchung ergab sich dann das im Folgenden beschriebene eigentümliche Verhalten des Benzins, welches wohl in gleicher Weise wie das Verhalten der Krystalle ausgelegt werden kann. Ich hatte die numerischen Resultate meiner Versuche nicht aufbewahrt; Hr. E. HEINS hat nun die Freundlichkeit gehabt, diese Versuche zu wiederholen und mir die Benutzung seiner Resultate gütigst zu gestatten. Die numerischen Angaben des Folgenden sind den Versuchen Hrn. HEINS' entlehnt.

[1]) Siehe Phil. Mag. (Ser. 5.) Bd. 11, S. 414, 1881.

Digitized by Google

1. Die Methode ist einer von Hrn. W. GIESE[1]) benutzten nachgebildet. Das Benzin befand sich in einer Cuvette von Zink (*B* Fig. 34); in ihm und ganz von ihm umgeben hing an zwei Drähten eine Platte von Zinkblech von ca. 12 cm Länge und 8 cm Breite; diese Platte bildete die innere, die Cuvette selbst die äufsere Belegung einer Leydener Flasche, deren isolierendes Medium das Benzin war. Die innere Belegung war mit dem nicht abgeleiteten Quadranten eines Elektrometers verbunden und konnte durch den Unterbrecher α zur Erde abgeleitet werden; die äufsere Belegung konnte entweder durch γ gleichfalls mit der Erde oder durch β mit dem Pol einer sehr konstanten Kette von 100 kleinen Daniells verbunden werden, deren anderer Pol durch Ableitung auf dem Potential Null gehalten wurde. Gesetzt, es seien die Leitungen bei α und β geschlossen, bei γ unterbrochen, so steht offenbar die Elektrometernadel in ihrer Ruhelage, und ein je nach dem Widerstande des Benzins mehr oder weniger starker Strom zirkuliert in der Leitung. Wird alsdann die Leitung bei α unterbrochen, so strebt die innere Belegung, sich auf das Potential der äufseren zu laden, und die Elektrometernadel macht daher einen Ausschlag nach derjenigen Richtung, nach welcher sie sich bewegen würde, wenn der nicht abgeleitete Quadrant direkt mit dem isolierten Pole der Batterie verbunden würde; diese Richtung soll die positive heifsen. Die Geschwindigkeit, mit welcher die Nadel ausweicht, giebt offenbar ein passendes Mafs für den Widerstand des Benzins. Das Verhältnis der Kapacität des Elektrometers zu der des Benzinkondensators war gleich 4,5 : 1[2]), das volle Potential der Batterie würde das Elektrometer um 5500 Skalenteile aus seiner Ruhelage entfernt haben; angenommen nun, man hätte eine Sekunde nach der Unterbrechung bei α die Elektrometerleitung bei δ

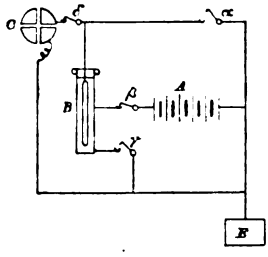


Fig. 34.

[1]) WIEDEMANN'S Ann. Bd. 9, S. 160, 1880.

[2]) Die scheinbare Kapacität der Quadranten ist so grofs infolge der Wirkung der stark geladenen Elektrometernadel.

Digitized by Google

aufgehoben und in dem Elektrometer einen Ausschlag von a Skalenteilen vorgefunden, so wäre also in einer Sekunde die Potentialdifferenz der Belegungen um $a/5500$ ihres Wertes herabgesunken, ohne das Elektrometer wäre dieselbe $(4{,}5+1)$-mal so schnell, oder um $a/1000$ in einer Sekunde, oder auch auf ihren $e^{4\pi}$-ten Teil in $4\pi \cdot 1000/a$ Sekunden abgefallen. Diese letztere Zeit hätten wir dann nur noch durch die Dielektricitätskonstante des Benzins zu dividieren, um den in absolutem elektrostatischen Mafse gemessenen spezifischen Widerstand zu erhalten. Auf diese Weise also konnte der Widerstand gemessen werden; um den Rückstand zu beobachten, hob man durch β die äufsere Belegung von der Batterie ab und verband sie durch γ mit der Erde; immer genau eine Sekunde nach dem Schlufs von γ wurde dann die Leitung bei α aufgehoben. Der noch vorhandene Rückstand gab dann einen negativen Ausschlag des Elektrometers, der schnell wuchs, einen Maximalwert erreichte und nun, indem die entstandene Ladung durch Leitung vernichtet wurde, langsam abfiel. Aus dem Verlaufe der Ablenkung wäre ein exaktes Mafs des Rückstandes nur durch komplizierte Rechnungen zu gewinnen, eine Schätzung über die Gröfse desselben aber ergiebt der erlangte Maximalwert unmittelbar.

2. Wurde nun käufliches Benzin in die Flasche gefüllt, der Strom im allgemeinen geschlossen gehalten und nur von Zeit zu Zeit Widerstand und Rückstand geprüft, so ergab sich das Folgende: Zunächst war der Widerstand so klein, dafs in wenigen Augenblicken nach Öffnung von α die Skala aus dem Gesichtsfelde verschwand; der Rückstand war gleichzeitig ziemlich beträchtlich, sein Maximalwert erreichte mehr als 10 pCt. der ursprünglichen Ladung, er verschwand infolge der starken Leitung verhältnismäfsig schnell. Prüfte man nach $^1/_3$—$^1/_2$ Stunde wieder, so fand man den Widerstand bequem mefsbar[1]), gleichzeitig war dann der Rückstand viel kleiner geworden. In gleichem Sinne änderten sich beide Eigenschaften unausgesetzt weiter, nach 24 Stunden war das Benzin fast völlig isolierend geworden, Rückstandsbildung war kaum

[1]) Und zwar hatte derselbe abgenommen für beide Richtungen des Stromes.

Digitized by Google

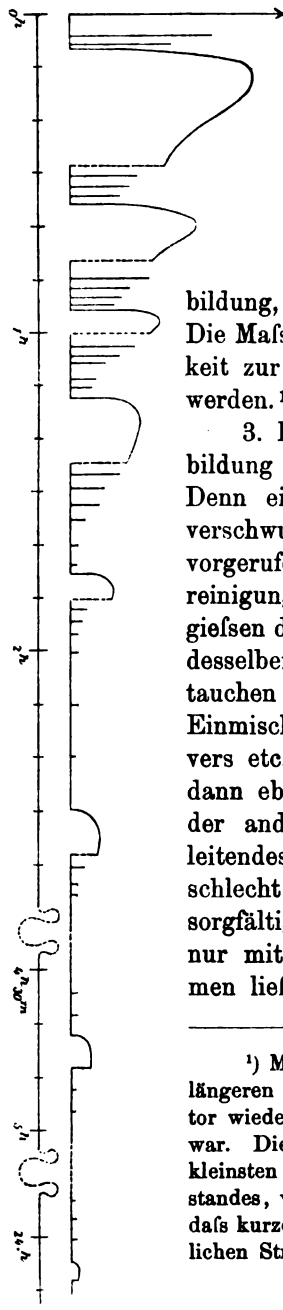


Fig. 35.

noch wahrzunehmen. Fig. 35 stellt numerisch richtig einen bestimmten Versuch dar; in die Abscissenaxe sind in Stunden und Minuten nach dem Beginne die Zeiten eingetragen; die senkrechten Ordinaten geben das zu den entsprechenden Zeiten aufgefundene Leitungsvermögen; die Kurven geben den Verlauf der Rückstandsbildung, soweit dieselbe jedesmal verfolgt wurde. Die Mafse sind nur relative, die Leitungsfähigkeit zur Zeit 0 war zu grofs, um gemessen zu werden.[1])

3. Die anfängliche Leitung und Rückstandsbildung beruht sicher auf Verunreinigungen. Denn einerseits kann dieselbe, nachdem sie verschwunden, durch alles dasjenige wieder hervorgerufen werden, was eine erneuerte Verunreinigung herbeiführen kann, also durch Umgiefsen des Benzins in andere Gefäfse, Umrühren desselben, Einblasen von feuchter Luft, Eintauchen eines Drahtes von oxydierbarem Metall, Einmischen geringer Mengen irgend eines Pulvers etc. Die so erneuerte Wirksamkeit wird dann ebenso zerstört wie das erste Mal. Auf der anderen Seite konnte man ein sehr gut leitendes Benzin auch dadurch zu einem sehr schlecht leitenden machen, dafs man es sehr sorgfältig über Chlorcalcium destillierte und nur mit solchen Gefäfsen in Berührung kommen liefs, welche schon mit gereinigtem Benzin

[1]) Man wird in Fig. 35 bemerken, dafs nach jeder längeren Unterbrechung die Strömung zum Kondensator wieder gröfser ist, als sie vorher schon gewesen war. Diese Erscheinung beruht jedenfalls nur zum kleinsten Teile in einer erneuerten Abnahme des Widerstandes, vielmehr ist sie der Ausdruck der Thatsache, dafs kurze Zeit nach jeder Unterbrechung zu der eigentlichen Strömung die rückstandsbildende sich addiert.

Digitized by Google

ausgespült waren. Aber niemals wurde auf diese Weise der höchste Grad des Isolationsvermögens erreicht.

4. Die Abnahme der Wirksamkeit ist wenigstens zum Teile eine Wirkung des Stromes. Zwar nahm dieselbe auch bei ruhigem Stehen des Benzins in dem Gefäfse ab, aber weder so schnell, noch so weit, als wenn die Belegungen des Gefäfses mit den Polen der Batterie in Verbindung waren. Es scheint sich verschiedenes Benzin in dieser Richtung verschieden zu verhalten. Das von mir selbst untersuchte änderte ohne Stromwirkung seinen Widerstand nur sehr wenig, während die Leitungsfähigkeit des von Hrn. Heins benutzten schon durch ruhiges Stehen auf sehr kleine Werte abfiel. Es kann sein, dafs im ersteren Falle das Benzin mehr durch gelöste, im letzteren mehr durch suspendierte Substanzen verunreinigt war. Versuche, welche die besondere Natur der wirksamen Verunreinigungen ermitteln sollten, blieben erfolglos, ich bemerke in Bezug auf dieselben nur, dafs dabei das Benzin zwischen Glaselektroden geprüft werden konnte, da der Widerstand der letzteren gegen den des Benzins verschwand.

5. Das elektrisch gereinigte Benzin kommt in seinem Verhalten dem eines idealen flüssigen Isolators ganz aufserordentlich nahe. Von Rückstandsbildung ist kaum eine Spur wahrzunehmen, das Isolationsvermögen steht dem unserer besten Isolatoren nicht viel nach. Die Versuche konnten wegen der eingetretenen Verdunstung nicht viel über 24 Stunden ausgedehnt werden, in dieser Zeit war eine feste Grenze noch nicht erreicht, doch war die Isolationsfähigkeit schon so grofs geworden, dafs beispielsweise in einer Minute nach Unterbrechung der Erdleitung in α die Nadel des Elektrometers nur um 6 Skalenteile aus ihrer Ruhelage gewichen war. Hieraus und aus dem angegebenen Verhältnisse der Kapacitäten berechnet man leicht, dafs eine Leydener Flasche mit dem betreffenden Benzin als Isolator erst in ungefähr zwei Stunden die Hälfte ihrer Ladung verloren haben würde.

6. Der in unreinem Benzin auftretende Rückstand beruht auf einer nachwirkenden Polarisation (welcher Natur auch immer) und nicht auf einem Eindringen freier Elektricität. Dies kann durch die folgenden Versuche gezeigt werden. Läfst man in dem Augenblicke, wo nach Unterbrechung von α der Rück-

Digitized by Google

stand eben hervorzutreten beginnt, das Benzin durch eine Öffnung des Bodens möglichst schnell und ruhig ab, so tritt der Rückstand plötzlich hervor, und zwar mit dem gleichen Vorzeichen, welches er ohne das Ablassen gehabt haben würde. Beruhte der Rückstand auf einem Eindringen der Elektricität in den Isolator, so hätte die Entfernung dieses Isolators zwar ebenfalls einen plötzlichen Ausschlag zur Folge haben müssen, aber derselbe würde das entgegengesetzte Vorzeichen, wie die mit dem Isolator entfernte Elektricität, also wie der eigentliche Rückstand, gehabt haben. In einem anderen Versuche polarisierte ich unreines Benzin in einem gröfseren Gefäfse zwischen zwei Platten *A* und *B*, die mehrere Centimeter Abstand hatten. *A* und *B* wurden dann auf das Potential Null gebracht und sogleich in ihren Zwischenraum ein System von drei anderen Platten, 1, 2, 3, eingeschoben. Die äufseren Platten 1 und 3 waren zur Erde und zu einem Quadranten eines Elektrometers abgeleitet; Platte 2, welche mit dem anderen Quadranten in Verbindung stand, war isoliert dicht auf 3 befestigt, derart, dafs zwischen 2 und 3 kein Benzin eintrat, während zwischen 1 und 2 eine Schicht von einigen Centimetern Dicke sich befand. Sogleich beim Einschieben dieses Systemes erhielt man dann im Elektrometer einen Ausschlag, dessen Richtung mit der Richtung der Polarisation des Benzins wechselte, und welcher einem Teile des Rückstandes entsprach, der sonst auf den Platten *A* und *B* sich entwickelt hätte. Es ist aber leicht einzusehen, dafs das Vorzeichen dieses Ausschlages das entgegengesetzte sein mufs, jenachdem im Benzin noch nachwirkende Polarisation vorhanden ist, oder von den Platten aus eingedrungene Elektricität, denn die elektrische Doppelschicht, welche zwischen die Platten 1 und 2 gelangt, wird in diesen Fällen entgegengesetztes Vorzeichen haben. Der Erfolg des Versuches zeigte nachwirkende Polarisation an. Da bei diesen Versuchen Reibung und unregelmäfsige Bewegungen, also Verwerfung der polarisierten Elemente unvermeidlich ist, so kann es nicht verwundern, wenn dieselben nicht sehr regelmäfsig verlaufen. In der That war der Ausschlag von sehr variabler Gröfse, und hin und wieder gab selbst ein Versuch ein entgegengesetztes Resultat, doch rechtfertigte der Verlauf der weitaus überwiegenden Mehrzahl die ausgesprochene Behauptung.

Digitized by Google

15. Über die Verteilung der Druckkräfte in einem elastischen Kreiscylinder.

Aus Schlömilch's Zeitschrift für Math. u. Physik. Bd. 28, S. 125—128, 1883.

Ein homogener elastischer Kreiscylinder sei durch zwei feste zu seiner Axe senkrechte Wände begrenzt. Auf seine Mantelfläche mögen unter beliebiger Neigung gegen dieselbe Druckkräfte wirken, welche senkrecht zur Cylinderaxe und von der dieser Axe parallelen Koordinate unabhängig sind. Alsdann läfst sich die Verteilung der Kräfte im Inneren in geschlossener Form von so bemerkenswerter Einfachheit darstellen, dafs dieselbe trotz der Beschränktheit des Problemes von Interesse ist.

Es sei F der Druck, welcher auf dem Elemente ds der Mantelfläche lastet; f die Richtung dieses Druckes; es sei ferner durch M_n bezeichnet die Komponente in Richtung der m des Druckes, welcher auf einem der Cylinderaxe parallelen Flächenelemente lastet, dessen Normale die Richtung n hat; unter m,n sei verstanden der Winkel, welchen die Richtung m mit der Richtung n bildet; unter r der Radius vector, welcher das in Betracht gezogene Flächenelement mit dem Elemente ds des Mantels verbindet; unter ϱ die Senkrechte, welche von dem Elemente ds auf die Cylinderaxe gefällt ist; endlich unter R der Radius des Cylinders. Unter dieser Bezeichnung ist

$$M_n = -p\cos n,m + \frac{2}{\pi}\int F \cdot \frac{\cos f,r \cos n,r \cos m,r}{r}\, ds \quad ,$$

$$p = \frac{1}{2R\pi}\int F \cos f,r\, ds \quad . \qquad 1)$$

Die Integrationen sind um den ganzen Umfang des Mantels zu erstrecken.

Digitized by Google

Beweis. Wir zeigen zuerst, dafs der Ausdruck 1) ein mögliches System von Druckkräften darstellt. Sind x und y rechtwinklige Koordinaten in einer Ebene, welche zur Axe des Cylinders senkrecht ist, so bilden die Drucke X_x, Y_y, Y_x, da sie von der dritten Koordinate unabhängig sind, dann ein mögliches System, wenn sie den Differentialgleichungen genügen:

$$2) \quad 0 = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_x}{\partial y}, \quad 0 = \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 X_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y_y}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 X_y}{\partial y \partial x}.$$

Es seien nun ϱ und ω Polarkoordinaten, nämlich $\varrho\cos\omega = x$, $\varrho\sin\omega = y$ und es bezeichne gleichzeitig in den Druckkomponenten P_ϱ, P_ω, Ω_ω ω die Richtung, welche senkrecht zur Richtung von ϱ ist; es ist dann das Drucksystem

$$3) \qquad P_\varrho = \frac{\cos\omega}{\varrho}, \quad P_\omega = 0, \quad \Omega_\omega = 0$$

ein solches, welches den Gleichungen 2) genügt. Man weist dies nach, indem man die aus 3) folgenden Werte der X_x, Y_y, Y_x berechnet und dieselben in 1) einsetzt. Die drei Gleichungen 3) können ersetzt werden durch die eine:

$$M_n = \frac{\cos\omega\cos n,\varrho\cos m,\varrho}{\varrho} = \frac{\cos x,\varrho\cos n,\varrho\cos m,\varrho}{\varrho}.$$

Auch eine Summe solcher M_n mit verschiedenen Polen und mit beliebigen Konstanten multipliziert, wird ein den Differentialgleichungen 2) genügendes System darstellen. Nun ist das in Gleichung 1) vorkommende Integral eine solche Summe und da der vor dem Integralzeichen stehende Ausdruck nur einen gleichmäfsig durch den Cylinder verbreiteten konstanten Druck p darstellt, so ist das durch Gleichung 1) angedeutete System ein mögliches.

Wir beweisen zweitens, dafs, wenn wir uns der Mantelfläche unendlich nähern und die Richtung der Normale n mit der Richtung des Cylinderradius ϱ zusammenfallen lassen, dafs dann M_n zusammenfällt mit der Komponente von F in der Richtung von m, dafs also dann wird $M_n = F\cos m,n$. Wir zerlegen zu dem Ende das Integral in zwei Teile, deren einer sich bezieht auf die dem betrachteten Elemente unendlich

Digitized by Google

nahen Teile der Grenze, der andere auf die entfernteren. Für diesen letztgenannten, und zwar nur für diesen, ist

$$r = 2R\cos\varrho,r \quad , \quad \frac{\cos\varrho,r}{r} = \frac{\cos n,r}{r} = \frac{1}{2R} \quad ,$$

also wird dieser Teil des Integrales

$$= \frac{1}{R\pi}\int F\cos f,r\cos m,r\,ds$$

$$= \frac{1}{2R\pi}\int \{F\cos f,m + F\cos(f,\varrho - m,\varrho)\}\,ds \quad ,$$

da $f,\varrho + m,r = f,m$; $f,r - m,r = f,\varrho - m,\varrho$.

Nun ist, da die Kräfte F weder eine Verschiebung des Cylinders in der Richtung m, noch eine Drehung um die Axe hervorbringen sollen:

$$\int F\cos f,m\,ds = 0 \quad , \qquad \int F\sin f,\varrho\,ds = 0 \quad .$$

Es wird daher der untersuchte Teil des Integrales

$$= \frac{1}{2R\pi}\cos m,\varrho\int F\cos f,\varrho\,ds \quad ,$$

er hebt sich daher gegen das erste Glied in M_n fort, und M_n reduziert sich daher auf den Teil des Integrales, welcher von der benachbarten Mantelfläche herrührt. Hier haben wir $r\,d\varrho,r = ds\cos\varrho,r$, also

$$\frac{\cos n,r}{r}\,ds = \frac{\cos\varrho,r}{r}\,ds = d\varrho,r \quad ,$$

und also, da wir F und f in dem unendlich kleinen Teile als Konstante ansehen können:

$$M_n = \frac{2}{\pi}F\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos f,r\cos m,r\,d\varrho,r$$

Digitized by Google

$$= \frac{2}{\pi} F \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos(r,\varrho - f,\varrho) \cos(r,\varrho - m,\varrho)\, d\varrho,r$$

$$= \frac{F}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos(2r,\varrho - f,\varrho)\, d\varrho,r + \frac{F}{\pi} \cos f,m \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} dr,\varrho$$

$$= F \cos f,m\,, \text{ was zu beweisen war.}$$

Bei Berechnung des ersten der Teile, in welche wir das Integral zerlegten, hätten wir, streng genommen, die dem Elemente naheliegenden Teile der Mantelfläche von der Integration ausschliefsen müssen; eine einfache Betrachtung lehrt, dafs der begangene Fehler verschwindend klein ist.

Beispiel. Die Anwendung unserer Formel ist besonders bequem in dem Falle, dafs nur an einzelnen Stellen des Cylindermantels Druckkräfte angreifen. Denken wir uns beispielweise einen Cylinder zwischen zwei ebene parallele Platten gebracht und letztere mit dem Drucke P gegen einander gepreſst. In solcher Lage befinden sich angenähert die Walzen, welche häufig die Unterlagen eiserner Brücken bilden. Wir legen die xAxe durch die Berührungspunkte der Cylinder und der Platten, machen ihren Schnittpunkt mit der Cylinderaxe zum Nullpunkt, nennen die zu den x senkrechten Koordinaten y und bezeichnen mit r_1 den Abstand des betrachteten Elementes von dem einen, mit r_2 den Abstand von dem anderen Berührungspunkte. Alsdann erhalten wir die Druckkomponente N_n, welche in Richtung der Normalen des betrachteten Elementes entfällt:

$$N_n = -\frac{P}{R\pi} + \frac{2P}{\pi}\left\{\frac{\cos r_1 x \cos^2 r_1 n}{r_1} + \frac{\cos r_2 x \cos^2 r_2 n}{r_2}\right\}.$$

Bestimmen wir die Richtung n so, dafs bei festgehaltenen r_1 und r_2 N_n ein Maximum oder Minimum wird, so erhalten wir die Werte und Richtungen der Hauptdrucke für den Punkt $r_1 r_2$. Diese Rechnung läſst sich ausführen. Für die x- und yAxe fallen die Richtungen der Hauptdrucke mit den Rich-

Digitized by Google

tungen der Axen zusammen, hierdurch erhält man leicht für diese Axen:
für die xAxe

$$X_x = \frac{P}{R\pi}\frac{3R^2+x^2}{R^2-x^2} \quad , \qquad Y_y = -\frac{P}{R\pi} \quad ,$$

für die yAxe

$$X_x = \frac{P}{R\pi}\frac{3R^4-2R^2y^2-y^4}{R^4+2R^2y^2+y^4} \quad , \qquad Y_y = -\frac{P}{R\pi}\cdot\left(\frac{R^2-y^2}{R^2+y^2}\right)^2 \quad .$$

Die Elemente der Axen sind sämtlich gedrückt in Richtung der x, gespannt in der dazu senkrechten Richtung. Im Mittelpunkte ist der Druck in Richtung der x $6/\pi$-mal so grofs, als wenn sich der Druck P gleichmäfsig über den ganzen Querschnitt $2R$ verteilte. Übrigens erhellt, dafs schon in diesem einfachsten Falle die Verteilung der Drucke eine äufserst komplizierte ist.

Digitized by Google

16. Über das Gleichgewicht schwimmender elastischer Platten.

Aus Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie. Bd. 22, S. 449—455, 1884.

Auf einer unendlich ausgedehnten schweren Flüssigkeit, z. B. auf einer Wasserfläche, schwimme eine ebenfalls unendlich ausgedehnte elastische Platte, z. B. von Eis; auf der letzteren mögen eine Reihe von Gewichten ruhen, ohne dafs eine seitliche Spannung stattfindet, es wird die Gleichgewichtslage der Platte gesucht. Die Lösung dieser Aufgabe führt zu gewissen paradoxen Resultaten, um derentwillen sie mitgeteilt werden möge.

Beschränken wir uns auf kleine Verschiebungen, so superponieren sich die Wirkungen der Gewichte, und es genügt, wenn wir ein einzelnes Gewicht P in Betracht ziehen. Wir denken uns dasselbe wirkend im Nullpunkte des Koordinatensystemes der xy, deren Ebene mit der als unendlich dünn angesehenen Platte zusammenfallen möge. Wir setzen ferner $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 = \Delta$, $x^2+y^2 = \varrho^2$, bezeichnen mit E und μ in üblicher Weise die elastischen Konstanten des Materiales der Platte, mit h ihre Dicke und nennen s das spezifische Gewicht der Flüssigkeit. Ist dann noch z die vertikale Abweichung der deformierten Platte von der xyEbene, positiv gerechnet nach unten, so ist einerseits $(Eh^3/12(1-\mu^2))\,\Delta\Delta z$ gleich dem von den elastischen Kräften auf die Flächeneinheit nach oben hin ausgeübten Schube,[1]) andererseits ist der ebenfalls nach oben gerichtete hydrostatische Auftrieb per Flächeneinheit gleich sz. Die Summe beider Kräfte mufs Null sein überall aufser im Nullpunkte. Hier mufs der Integralwert der Summe

[1]) Siehe Clebsch, Theorie der Elasticität, 1862. § 73.

Digitized by Google

genommen über eine sehr kleine Fläche gleich sein dem Gewichte P. Da aber der Integralwert des hydrostatischen Druckes über eine solche Fläche verschwindet, so mufs schon der Integralwert der elastischen Reaktion für sich dieser Bedingung genügen. Setzen wir nun noch zur Abkürzung:

$$\frac{12\,(1-\mu^2)\,s}{Eh^3} = a^4 = 1/\alpha^4 \quad ,$$

so formuliert sich demnach unsere Aufgabe mathematisch dahin: Es ist ein Integral der Gleichung $\Delta\Delta z + a^4 z = 0$ zu finden, von solcher Beschaffenheit, dafs es verschwinde im Unendlichen, endlich sei im Mittelpunkte, und dafs das über die Nachbarschaft des Mittelpunktes ausgedehnte Integral $s\alpha^4 \int \Delta\Delta z dw$ gleich P werde.

Wir setzen mit Heine[1]):

$$K(\varrho) = \int_0^\infty e^{i\varrho \cos iu}\, du \quad ,$$

dann ist $K(\varrho)$ eine Lösung der Differentialgleichung $\Delta z = -z$, daher ist $K(\varrho\sqrt[4]{-a^4})$ eine Lösung der uns vorgelegten Gleichung. Es ist demnach auch:

$$z = \frac{a^2 P}{4\pi s i}\left\{K[a\varrho\sqrt{\tfrac{1}{2}}(1+i)] - K[a\varrho\sqrt{\tfrac{1}{2}}(1-i)]\right\} \quad , \qquad 1)$$

eine Lösung dieser Gleichung. Dieselbe ist reell, bringt man sie auch in reelle Form, so erhält man nach einer Umformung des Integrales:

$$z = \frac{a^2 P}{4\pi s}\int_1^\infty \frac{e^{-a\varrho\sqrt{\frac{1}{2}}v} \sin a\varrho\sqrt{\tfrac{1}{2}}\, v dv}{\sqrt{v^2-1}} \quad , \qquad 2)$$

welche Form zeigt, dafs die angenommene Lösung im Unendlichen verschwindet. Um ihre Werte in der Nähe des Nullpunktes zu untersuchen, benutzt man eine von Hrn. H. Weber angegebene Entwickelung[2]) der Funktion K, zunächst nach

[1]) Handbuch der Kugelfunktionen, Bd. 1. S. 192, 1878.

[2]) Daselbst, S. 244. Bei der Angabe des Wertes von C findet sich hier ein irrtümliches Vorzeichen.

Digitized by Google

Bessel'schen Funktionen, dann weiter nach Potenzen, und erhält so:

$$3)\quad z = \frac{a^2 P}{2\pi s}\left\{\frac{a^2\varrho^2}{2.2}\log a\varrho - \frac{a^6\varrho^6}{2.4.6.2.4.6}\left(\log a\varrho - \tfrac{5}{6}\right) + \ldots.\right.$$
$$+ \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{a^4\varrho^4}{2.4.2.4} + \frac{a^8\varrho^8}{2.4.6.8.2.4.6.8} - \ldots\right)$$
$$\left. - (1 + \log 2 - C)\left(\frac{a^2\varrho^2}{2.2} - \frac{a^6\varrho^6}{2.4.6.2.4.6} + \ldots\right)\right\} .$$

C ist gleich 0,57721. Die Reihen sind so geordnet, dafs jede Horizontalreihe für sich ein partikuläres Integral der vorgelegten Differentialgleichung darstellt. Es ist aus dieser Form ersichtlich, dafs z endlich bleibt für $\varrho = 0$, ferner wird das über eine kleine Kreisfläche um den Mittelpunkt erstreckte Integral:

$$\int \Delta\Delta z dw = 2\pi \int \varrho \Delta\Delta z d\varrho = 2\pi \lim\left(\varrho \frac{\partial \Delta z}{\partial \varrho}\right)_0 = \frac{a^4}{s} P \quad .$$

Danach ist das in Betracht genommene Integral das gesuchte, zugleich haben wir in der Form 3) eine Darstellung gewonnen, welche zur numerischen Berechnung von z für kleine Werte von ϱ geeignet ist. Für grofse Werte benutzt man eine semikonvergente Reihe, welche man aus 2) durch Entwickelung der Wurzel und Integration der Glieder erhält, und deren Anfang ist:

$$4)\quad z = \frac{a^2 P}{2\pi s}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-a\varrho\sqrt{1/2}}}{\sqrt{a\varrho}}\left\{\sin\left(a\varrho\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \frac{\pi}{8}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{8\varrho}\sin\left(a\varrho\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \frac{3\pi}{8}\right) + \ldots\right\} \quad .$$

Noch in einigen weiteren Formen läfst sich die Lösung darstellen. Wir wollen die obigen durch die folgenden Bemerkungen interpretieren.

1. An der Stelle, an welcher das Gewicht aufgelegt ist, erreicht die Einsenkung der Platte den gröfsten Wert, $z = z_0 = a^2 P/8s$. Die Platte steigt von da nach allen Richtungen erst langsam, dann schnell, dann wieder langsam gegen das Niveau 0 an, in der Entfernung $\varrho = \alpha$ ist $z = 0{,}646 z_0$, für

Digitized by Google

$\varrho = 2\alpha$ ist $z = 0{,}258 z_0$, für $\varrho = 3\alpha$ ist $z = 0{,}066 z_0$. Nahezu in der Entfernung $\varrho = \frac{7}{8}\pi\sqrt{2}\alpha = 3{,}887\alpha$ wechselt z sein Zeichen, und es erscheint also die Platte nach aufsen zu wulstartig gehoben um den Depressionspunkt. Auffällig aber mufs es erscheinen, dafs, wenn wir uns nun weiter vom Mittelpunkte entfernen, beständig mit der Periode $\pi\sqrt{2}.\alpha$ sich Hebungen und Senkungen folgen. Es wird die Platte in ein vollständiges System kreisrunder Wellen verworfen, allerdings nimmt die Höhe dieser Wellen nach aufsen so schnell ab, dafs es nicht wunderbar erscheint, wenn man dieselben ohne besondere Vorkehrungen nicht wahrnehmen kann. Die Gröfse α, welche für das Wellensystem charakteristisch ist, ist eine Länge. Berechnen wir dieselbe für den Fall, dafs Eis auf Wasser schwimmt, so haben wir $s = 10^{-6}\,\mathrm{kg/mm^3}$; μ können wir ohne Schaden gleich $\frac{1}{4}$ annehmen, E haben wir nach einer Angabe von Hrn. Reusch[1]) gleich 236 $\mathrm{kg/mm^2}$ zu setzen, und so erhalten wir für verschiedene Dicken h:

$h =$	10	20	50	100	200	mm
$\alpha =$	0,38	0,64	1,27	2,14	3,60	m,

woraus sich dann leicht die von 100 kg veranlafste Einsenkung ergiebt:

$z_0 =$	86,4	30,5	7,72	2,73	0,96 mm.

2. Die Beanspruchung, welche die Platte erfährt, hängt ab von den zweiten Differentialquotienten von z nach x und y; sie wird daher unendlich im Nullpunkte. Dies zeigt an, dafs die gröfste Beanspruchung nicht gefunden werden kann ohne eine Kenntnis von der Verteilung des Gewichtes. Wir wollen die Maximalspannung berechnen für den einfachen Fall, dafs die Belastung P gleichmäfsig das Innere einer Kreisfläche vom Radius R erfüllt, wo R klein sein soll gegen α. Zu dem Ende berechnen wir Δz_0 für den Mittelpunkt. Nennen wir ϱ den Abstand vom Mittelpunkte, in welchem das Element dP des Gewichtes aufliegt, so ist derjenige Teil von Δz_0, welcher von diesem Elemente herrührt, nach Gleichung 3) gleich $(a^4 dP/2\pi s)(\log a\varrho - \log 2 + C)$. Vernachlässigt sind die Glieder, welche verschwinden mit ϱ. Eine einfache Integration ergiebt uns nun:

[1]) Siehe Wiedemann's Ann. Bd. 9, S. 329, 1880.

Digitized by Google

$$\Delta z_0 = 2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{a^4 P}{2\pi s}\{\log aR - \tfrac{1}{2} - \log 2 + C\}$$

$$= \frac{a^4 P}{2\pi s}\{\log aR - 0{,}6519\} \quad .$$

Die Maximalspannung im Mittelpunkte der gekrümmten Platte ist nun $p = (Eh/2)\,\partial^2 z/\partial x^2$, bilden wir p und setzen für a^4 seinen Wert ein, so folgt:

$$p = \frac{3(1-\mu^2)P}{2\pi h^2}\{\log aR - 0{,}6519\} \quad .$$

Es wäre verkehrt, wollte man diese Formel auch dann noch anwenden, wenn R abnimmt bis zur Ordnung der Dicke der Platte oder zu noch kleineren Werten. Es wird sich nämlich in diesem Falle der Druck im Inneren der Platte immer noch verteilen auf eine Kreisfläche, deren Durchmesser angenähert der Dicke der Platte gleichkommt. Angenähert also können wir den Fall, dafs das Gewicht soviel wie möglich in einen Punkt konzentriert ist, dadurch repräsentieren, dafs wir R in der vorigen Formel gleich $h/2$ setzen, wir erhalten so für die Maximalspannung, der das Gewicht P die Platte überhaupt aussetzen kann:

$$p = \frac{3(1-\mu^2)P}{2\pi h^2}\left\{\log\frac{h}{\alpha} - 1{,}3090\right\} \quad .$$

Beispielsweise ergiebt sich für unsere eben betrachteten Eisplatten bei 100 kg Belastung resp.

$$p = 221\,, \quad 53\,, \quad 8{,}1\,, \quad 1{,}9\,, \quad 0{,}47 \text{ kg/cm}^2\,.$$

Die Platte von 100 mm Dicke würde das Gewicht sicher ertragen, diejenige von 50 mm Dicke vermutlich nicht mehr.

3. Der Auftrieb, den das Wasser auf die Platte infolge von deren Deformation ausübt, ist gleich:

$$2\pi\int_0^\infty s z_\varrho\, d\varrho = -\frac{2\pi s}{a^4}\int_0^\infty \Delta\Delta z_\varrho\, d\varrho = -P \quad ;$$

er ist also gleich dem belastenden Gewichte. Wie grofs also auch das Gewicht, es wird immer getragen; auf den Auftrieb, welchen die ebene unbelastete Platte erfährt, kommt es nicht

Digitized by Google

an. Legt man eine nicht zu kleine runde Scheibe steifen Papieres aufs Wasser, so kann man die Mitte derselben mit mehreren hundert Gramm belasten, während doch der Auftrieb des Papieres kaum einige Gramm beträgt. Schwimmt also ein Mensch auf einer ausgedehnten Eisplatte, so ist es, genau genommen, korrekter, zu sagen, er schwimme, weil er das Eis durch sein Gewicht zu einem sehr flachen Bote gewölbt habe, als zu sagen, er schwimme, weil das Eis leicht genug sei, ihn neben dem eigenen Gewichte zu tragen. Denn er würde ebenso gut schwimmen, wenn das Eis auch gar nicht leichter wäre, als das Wasser; und wenn man statt des Menschen beliebig grofse Gewichte auf das Eis stellte, so könnten dieselben wohl einbrechen durch das Eis, niemals aber versinken mit dem Eise. Die Grenze der Belastung hängt von der Festigkeit, aber nicht von der Leichtigkeit des Eises ab. Die Sache verhält sich anders, wenn Personen oder Gewichte gleichmäfsig über die Fläche verteilt sind, oder wenn der Radius der Platte nicht sehr grofs, d. h. nicht ein Vielfaches von α ist.

4. Betrachtet man den letzteren Fall, d. h. den Fall endlicher Platten, näher, so kommt man zu dem oberwähnten paradoxen Resultate. Für den freien Rand der kreisrund angenommenen Platte müssen die Bedingungen[1]) erfüllt sein:

$$\text{a)}\quad \Delta z - \frac{1-\mu}{\varrho}\frac{\partial z}{\partial \varrho} = 0 \quad , \qquad \text{b)}\quad \frac{\partial}{\partial \varrho}\Delta z = 0 \quad .$$

Im Mittelpunkte mufs dieselbe Bedingung bestehen, wie vorher. Durch diese drei Bedingungen ist die aus den drei im Mittelpunkte endlichen Integralen der Gleichung $\Delta\Delta z + a^4 z = 0$ zusammenzusetzende Lösung völlig bestimmt. Jenachdem für den Rand der Platte alsdann sich z negativ oder positiv ergiebt, jenachdem also der Rand über oder unter den Wasserspiegel zu liegen kommt, jenachdem schwimmt die Platte ohne weitere Vorrichtung (ohne eigenen Auftrieb), oder schwimmt sie nicht. Der Fall, dafs am Rande c) $z=0$ ist, bildet die Grenze. Fragen wir, unter welchen Umständen die Gleichungen a) b) c) gleichzeitig möglich sind, so werden wir auf das Ver-

[1]) Siehe Clebsch, l. c. § 73.

Digitized by Google

schwinden einer Determinante verwiesen, welche den Radius der Platte als Unbekannte enthält. In der That wird diese Determinante für gewisse Werte von R gleich Null, und zwar findet man mit einiger Geduld, dafs der kleinste Wert von R, für welchen dies eintritt, zwischen $2{,}5\,\alpha$ und $2{,}8\,\alpha$ liegt. Er liegt bei $2{,}5\alpha$, wenn $\mu = 0$, und bei $2{,}8\alpha$, wenn $\mu = \frac{1}{3}$ ist. Denken wir uns unsere Platte von gleichem spezifischen Gewichte mit der Flüssigkeit, so wird bei jeder Belastung, solange nicht ihr Radius den obigen Wert besitzt, im Gleichgewichtszustande der Rand unter den Wasserspiegel fallen müssen, es wird daher die Platte auch nicht das kleinste Gewicht zu tragen vermögen. Erreicht der Radius genau den kritischen Wert, so fällt der Rand der Platte in die Wasserlinie, und zwar für jede Belastung, daher vermag jetzt plötzlich die Platte jedes Gewicht zu tragen, welches nicht die Elasticitätsgrenze überschreitet. Wird der Radius noch gröfser, so wird am Rande jetzt z negativ, wir dürfen dann also noch ein gewisses Gewicht gleichmäfsig über die Platte verteilen, ohne dafs der Rand derselben tiefer als bis zum Wasserspiegel herabgedrückt würde, d. h. wir dürfen auch von vornherein die Platte etwas schwerer, als die Flüssigkeit annehmen. Denken wir uns also eine solche Platte, die an und für sich nicht schwimmen würde, in ihrer Mitte mit einem hinreichenden Gewichte belastet und nun aufs Wasser gelegt, so wird sie schwimmen; die Sicherheit des Schwimmens wird zunehmen, je mehr wir Gewichte in ihrer Mitte hinzufügen, sie wird abnehmen, wenn wir Gewichte aus der Mitte entfernen, und wenn wir hierin eine gewisse Grenze überschreiten, so wird die Möglichkeit des Schwimmens aufhören, die Platte wird versinken mit dem Reste der Gewichte.

Digitized by Google

17. Über die Beziehungen zwischen den Maxwell'schen elektrodynamischen Grundgleichungen und den Grundgleichungen der gegnerischen Elektrodynamik.

Aus Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie. Bd. 23. S. 84—103. 1884.

Sobald Ampère die Entdeckung Oersted's erfuhr, dafs der elektrische Strom die Magnetnadel in Bewegung setze, vermutete er, dafs auch unter einander elektrische Ströme bewegende Kräfte äufsern müfsten. Offenbar war sein Gedankengang nahezu dieser: Der Strom übt magnetische Kräfte aus — denn ein Magnetpol bewegt sich unter dem Einflusse des Stromes; und der Strom wird bewegt durch magnetische Kräfte — denn nach dem Prinzip der Reaktion bewegt sich auch ein Stromträger unter dem Einflusse des Magnetes. Will man also nicht die unwahrscheinliche Annahme machen, dafs es verschiedene Arten magnetischer Kräfte gebe, so mufs sich ein Stromträger auch bewegen unter dem Einflusse derjenigen magnetischen Kräfte, die ein anderer Strom ausübt, und so folgt denn die Wechselwirkung zwischen den Strömen.

Das wesentliche Glied in dieser Schlufsfolge ist die Annahme, dafs es nur eine Art magnetischer Kraft gebe, dafs also die von Strömen ausgeübten magnetischen Kräfte in allen Wirkungen gleichwertig seien mit gleich grofsen und gleich gerichteten Kräften, welche von Magnetpolen ausfliefsen. Diese Annahme aber ist bekanntermafsen hinreichend, um nicht nur das Vorhandensein, sondern auch die exakte Gröfse der elektrodynamischen Wirkung geschlossener Ströme aus ihren magnetischen Wirkungen zu bestimmen. Ob nun Ampère von diesem Prinzipe ausging oder nicht, jedenfalls statuierte er dasselbe

Digitized by Google

am Schlusse seiner Untersuchungen, indem er geradezu die Wirkung der Magnete zurückführte auf die Wirkung supponierter geschlossener Ströme. In der Folge hat man dann das Prinzip kaum erwähnt, sondern es als etwas Selbstverständliches hingenommen. Nach der Entdeckung derjenigen elektrischen Kräfte, welche veränderliche Ströme oder bewegte Magnete ausüben, trat ihm zur Seite ein analoges Prinzip in Bezug auf diese elektrischen Kräfte, ebenfalls mehr oder weniger unausgesprochen. Dafs diejenigen elektrischen Kräfte, welche aus Induktionswirkungen entspringen, nach jeder Richtung gleichbedeutend seien mit gleichen und gleichgerichteten Kräften elektrostatischer Quelle, ist ausdrücklich vielleicht nirgends behauptet worden, aber dies Prinzip ist die notwendige Voraussetzung und Folgerung der hauptsächlichsten Anschauungen, welche man sich über die elektrodynamischen Erscheinungen überhaupt gebildet hat. Nach der FARADAY'schen Anschauungsweise ist das elektrische Feld etwas selbständig und unabhängig von seiner Erzeugungsweise im Raume Bestehendes; welches also auch die Veranlassung zur Entstehung eines elektrischen Feldes ist, die Wirkungen, welche dasselbe ausübt, werden immer die gleichen sein. Auf der anderen Seite suchen diejenigen Physiker, welche WEBER's Anschauungen und verwandte vertreten, die elektrostatischen und elektrodynamischen Wirkungen als spezielle Fälle einer und derselben von elektrischen Teilchen ausgehenden Fernkraft darzustellen. Die Behauptung, dafs diese Kräfte spezielle Fälle einer allgemeineren Kraftäufserung sind, würde Sinn und Bedeutung verlieren, wollte man zulassen, dafs sich dieselben anders als durch Gröfse und Richtung, dafs sie sich auch nach Wesen und Wirkungsweise unterscheiden könnten. Aber abgesehen von aller Theorie findet sich die Annahme, von der wir reden, implicite enthalten in den meisten elektrischen Rechnungen; direkt geleugnet ist sie niemals worden, und so kann sie wohl als eine der Grundvorstellungen jeder bestehenden Elektrodynamik bezeichnet werden. Trotzdem hat man, soweit mir bekannt, noch nicht auf gewisse Folgerungen aufmerksam gemacht, zu welchen sie führt, und welche in folgendem entwickelt werden sollen. Als Prämissen unserer Schlüsse dienen dabei zunächst die erwähnten beiden Prinzipien, welche

Digitized by Google

man als das von der Einheit der elektrischen und das von der Einheit der magnetischen Kraft bezeichen könnte, und welche zwar nicht als selbstverständlich, wohl aber als allgemein zugegeben gelten können; ferner das Prinzip von der Erhaltung der Kraft, das Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung zwischen geschlossenen Stromsystemen, das Prinzip von der Superposition der elektrischen und magnetischen Wirkungen, endlich die bekannten Gesetze der magnetischen und elektromotorischen Wirkungen von geschlossenen Strömen und Magneten. Die Betrachtung bezieht sich stets auf geschlossene Ströme, auch wo dies nicht besonders bemerkt wird.

1. Ein Ringmagnet, dessen Querschnitt wir der Einfachheit halber als klein gegen seine übrigen Dimensionen betrachten, verliere seinen Magnetismus. Er übt alsdann auf alle in seiner Nähe befindliche Elektricität eine Kraft aus, welche strebt, diese Elektricität um den Körper des Magnetes herumzuwirbeln. Die Gröfse dieser Kraft ist proportional der Geschwindigkeit, mit welcher der Magnetismus erlischt, sie kann während einer kurzen, aber endlichen Zeit konstant sein, wenn während dieser Zeit der Magnetismus mit gleichbleibender Geschwindigkeit abfällt. Die Verteilung der Kraft im Raume ist genau dieselbe, wie die Verteilung magnetischer Kraft, welche ein im Körper des Ringmagnetes fliefsender Strom um sich verbreiten würde. Wie die letztere, so hat daher auch die hier betrachtete elektrische Kraft ein Potential; dasselbe ist vieldeutig und abgesehen von seiner Vieldeutigkeit gleich demjenigen, welches eine elektrische Doppelschicht von gleichförmigem Moment erzeugen würde, welche rings durch den Ring des Magnetes begrenzt wäre. Das Potential des Ringmagnetes auf einen elektrischen Pol kann, abgesehen von der Vieldeutigkeit, dargestellt werden durch das Potential jener Doppelschicht auf den Pol, oder auch mit Berücksichtigung der Vieldeutigkeit durch den mit einer passenden Konstanten multiplizierten sphärischen Winkel, unter welchem der Magnet vom Pol aus gesehen erscheint.

Dieses Potential bestimmt nun sowohl die Kräfte, mit welchen der Magnet den Pol, als auch diejenigen, mit welchen der Pol den Magnet zu bewegen strebt. Haben wir nicht einen Pol, sondern ein ganzes System elektrischer Massen,

Digitized by Google

so wird durch eine einfache Summation das Potential des erlöschenden Magnetes auf diese gefunden. Rühren insbesondere die elektrischen Kräfte, welche auf den Ringmagnet wirken, gar nicht von elektrischen Massen, sondern von einem zweiten erlöschenden Ringmagnet her, so ist ihre Verteilung dieselbe, als rührten sie von einer elektrischen Doppelschicht her; nach unserer Annahme von der Einheit der elektrischen Kraft findet daher auch zwischen den beiden erlöschenden Ringmagneten Wechselwirkung statt, und das Potential, welches diese Einwirkung bestimmt, ist gleich dem zweier elektrischen Doppelschichten aufeinander, deren Flächen durch die Körper der Magnete begrenzt sind. Wie man in der Elektrodynamik das Potential zweier magnetischen Doppelschichten aufeinander zurückführt auf ein über ihre Begrenzung zu nehmendes Integral, so können wir auch hier das Potential der elektrischen Schichten, d. h. der erlöschenden Magnete, in diese Form bringen. Wir finden so, dafs dieses Potential das Produkt ist aus dem Faktor A^2 [1]), den in absolutem magnetischen Mafse gemessenen Erlöschungsgeschwindigkeiten der Momente der beiden Magnete pro Längeneinheit und dem Integral $\int\int(\cos\varepsilon/r)\,dld\lambda'$, in welchem dl und $d\lambda'$ die Elemente der Längen der beiden Magnete bedeuten, und ε der Winkel ist, unter welchem dl gegen $d\lambda'$ geneigt ist.

Das so bestimmte Potential ist von gleicher Form, wie dasjenige elektrischer Ströme aufeinander, es wird also auch gleiche Wirkungen bedeuten. Zwei Ringmagnete, welche dicht nebeneinander verlaufen, werden sich im Augenblicke des gleichzeitigen Erlöschens anziehen, wenn sie in gleichem Sinne magnetisiert waren, sie werden sich abstofsen, wenn ihre Polarisation entgegengerichtet war. In der üblichen [2]) Elektro-

---

[1]) A ist, wie üblich, der reziproke Wert der Lichtgeschwindigkeit. Man erhält diesen Faktor, indem man quantitativ dieselben Überlegungen ausführt, welche hier nur qualitativ angegeben sind. Man vergleiche dieserhalb Abschnitt 2, S. 301.

[2]) Unter üblicher Elektrodynamik ist hier und im Folgenden jede Elektrodynamik verstanden, welche in den aus dem Neumann'schen Potentialgesetze abgeleiteten Kräften die exakten Werte auch dann erblickt, wenn es sich um die Anziehung veränderlicher Ströme handelt. Jede solche Elektrodynamik ist eo ipso auch gegnerisch zur Maxwell'schen.

Digitized by Google

dynamik fehlt diese Wirkung. Um sie einfacher darstellen zu können, führen wir einen neuen Namen ein. Wir bezeichnen die Veränderung einer magnetischen Polarisation als einen magnetischen Strom, und zwar nehmen wir diejenige magnetische Stromdichte als Einheit an, bei welcher die in absolutem magnetischen Maſse gemessene Polarisation pro Volumeneinheit sich in der Zeiteinheit um ihre Einheit verändert. Soweit wir aus den bisher bekannten Erscheinungen der unipolaren Induktion schlieſsen können, üben magnetische Pole, welche kontinuierlich eine geschlossene Linie füllen und in dieser mechanisch fortbewegt werden, nach aufsen dieselbe elektrostatische Wirkung aus, wie ein in jener Linie gelegener und seine Polarisation passend verändernder Ringmagnet. Darf diese Beziehung als allgemeingültig betrachtet werden, so umfaſst der Name „magnetischer Strom“ überhaupt die verschiedenen Arten bewegten Magnetismus, und wir dürfen von konstanten magnetischen Strömen so gut reden wie von konstanten elektrischen. Hier soll indes jener Name nur als eine einfachere Bezeichnung für veränderliche Polarisation angesehen werden. Unser Resultat läſst sich nun in folgender Form darstellen: Magnetische Ströme wirken aufeinander nach den gleichen Gesetzen, wie elektrische Ströme; die absolute Gröſse der Wirkung zwischen den im magnetischen Maſse durch die Zahl S gemessenen magnetischen Strömen ist gleich derjenigen zwischen den im elektrischen Maſse durch die Zahl S gemessenen elektrischen Strömen. Experimentell dürfte sich dieser Satz wohl nicht mehr bewahrheiten lassen. Es dürfte allerdings noch gelingen, zu zeigen, daſs ein erlöschender Ringmagnet elektrisch geladene Körper in Bewegung setzt; auch wohl, daſs er selbst durch elektrostatische Kräfte gedreht wird, so daſs seine Ebene sich senkrecht zur Richtung der Kraft stellt; aber auch bei sehr starken elektrostatischen Kräften werden diese Wirkungen an der Grenze der Beobachtung liegen, und so ist keine Hoffnung vorhanden, daſs man einen erlöschenden Ringmagnet sich richten sehen wird unter den schwachen Kräften, welche ein anderer erlöschender Magnet hervorruft.

Unsere Prämissen erlauben uns indessen, noch weitergehende Schlüsse zu ziehen. Man weiſs, daſs aus der Kenntnis

Digitized by Google

des elektrodynamischen Potentiales zweier elektrischen Ströme aufeinander und aus dem Prinzipe von der Erhaltung der Kraft das Vorhandensein und die absolute Gröfse der Induktionswirkung erschlossen werden kann. Gleiche Schlüsse lassen sich nun auch auf magnetische Strombahnen (Ringe weichen Eisens) anwenden. Um in einer solchen Bahn einen magnetischen Strom, den man sich alternierend denken kann, zu unterhalten, ist ein bestimmter Verbrauch von Arbeit notwendig. Wäre die Gröfse dieser Arbeit unabhängig davon, ob der Magnet, jeder elektrischen Wirkung entzogen, ruht, oder ob er, im elektrischen Felde bewegt, Arbeit leistet, so wäre nichts einfacher, als die unendliche Gewinnung von Arbeit aus dieser Bewegung. Es kann also eine solche Unabhängigkeit nicht stattfinden, vielmehr mufs die Arbeit, und also die magnetische (magnetomotorische) Kraft, welche jenen Strom von gegebener Intensität unterhält, abhängig sein von der Art und Geschwindigkeit der Bewegung der Strombahn und von der Veränderlichkeit des elektrischen Feldes. Man kann dies so auffassen, als addiere sich zu den aus anderer Quelle stammenden magnetischen Kräften eine durch die Bewegung und die Veränderlichkeit des Feldes veranlafste, welche wir als induzierte bezeichnen. Ihre Gröfse ist uns dann gegeben durch die Bedingung, dafs für jede beliebige Verrückung der Strombahn die durch die Verrückung zu gewinnende äufsere Arbeit kompensiert werde durch einen gleichen infolge der Verrückung notwendig aufzuwendenden Mehrbetrag an Arbeit im Inneren der Strombahn. Dieser Gedankengang unterscheidet sich der Form nach in nichts von demjenigen, durch welchen man die Induktionserscheinungen in elektrischen Strombahnen erschliefst, und da auch die Kräfte zwischen magnetischen Strömen der Form nach mit denjenigen zwischen elektrischen Strömen übereinstimmen, so mufs das Endresultat in beiden Gebieten formell das gleiche sein. Wir brauchen nur in den Gesetzen der elektrischen Induktion konsequent die Namen „elektrisch“ und „magnetisch“ zu vertauschen, um zu den hier gesuchten Induktionswirkungen magnetischer Stromkreise zu gelangen. Wir erfahren so, dafs ein ebener magnetischer Stromkreis, ein ebener Ring weichen Eisens, dessen Ebene senkrecht steht zur Kraftrichtung eines elektrischen Feldes, von einer magne-

Digitized by Google

tisierenden Kraft durchzuckt wird im Augenblicke, in welchem das Feld seine Intensität verliert, und dafs derselbe Ring in alternierendem Sinne polarisiert wird, sobald wir beginnen, ihn um eine Axe zu drehen, die senkrecht steht zur Richtung der elektrischen Kraft. Es erscheint die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dafs derartige Wirkungen der Beobachtung zugänglich werden. Es mufs aber auch ein Ringmagnet, dessen Polarisation die Richtung beständig ändert, in allen benachbarten Eisenringen wechselnde Polarisationen durch Induktion hervorrufen, und diese Wirkung ist allerdings zu klein, um einen wahrnehmbaren Wert erreichen zu können.

2. Man könnte glauben, dafs sich die hier aus allgemein angenommenen Prämissen abgeleiteten Wirkungen friedlich in das übliche System der Elektrodynamik einfügen liefsen. Dies ist jedoch nicht der Fall. In der That, denken wir uns an Stelle der bisher betrachteten Ringmagnete in sich zurücklaufende elektrische Solenoide gesetzt, in welchen die Stromstärke veränderlich ist, so sind ja die von diesen Solenoiden ausgehenden induzierten elektrischen Kräfte ganz analog denjenigen, welche die veränderlichen Ringmagnete ausübten. Aus den letzteren Kräften schlossen wir auf magnetodynamische Anziehungen, auf eine entsprechende elektrodynamische Anziehung müssen wir daher auch schliefsen für die veränderlichen Solenoide. Aber solange der Strom konstant in ihnen fliefst, findet keine Wirkung statt. Es mufs also im allgemeinen die elektrodynamische Anziehung zwischen Strömen abhängen von ihrer Veränderung, nicht nur von den augenblicklichen Stromstärken selbst. Diese Behauptung steht im Gegensatze zu einer in der üblichen Elektrodynamik allgemein acceptierten Annahme.[1]) Die Korrektur, welche wir an den Gesetzen der magetischen Wirkung konstanter Ströme anzubringen haben, um sie auf Ströme von veränderlicher Intensität auszudehnen, wird sich auf Grund unserer Prämissen berechnen lassen. Aber diese Korrektur wird nun auf Grund des Prinzips der Erhaltung der Kraft eine Korrektur auch in den induzierten elektrischen Kräften verlangen. Diese wird eine

[1]) Vgl. v. Helmholtz, Über die Theorie der Elektrodynamik, dritte Abhandlung. Wissenschaftliche Abhandlungen, Bd. 1, S. 729.

Digitized by Google

neue in den magnetischen Kräften fordern, und so fort, so dafs wir eine unendliche Reihe successiver Verbesserungen erhalten. Wir wollen diese einzelnen Glieder nun auch quantitativ berechnen. Wir nehmen an, dafs sie sich zur Gesamtwirkung einfach addieren, und dafs, wenn nur die unendlichen Summen gegen feste Werte konvergieren, dann diese Werte die wirklich der Natur entsprechenden sind. Wir bedienen uns in der Rechnung der folgenden besonderen Bezeichnung: Es soll $\bar{u}$ eine Funktion U bedeuten, für welche im ganzen unendlichen Raume $\Delta U = -4\pi u$ ist, also allgemein:

$$U = \bar{u} = \int \frac{u}{r} d\tau \quad ,$$

das Integral über den unendlichen Raum erstreckt.

Was zunächst die elektrischen Ströme anlangt, so seien u, v, w die Komponenten derselben. Da wir nur geschlossene Ströme in Betracht ziehen, so mufs sein:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0 \quad .$$

Sei ferner $U_1 = \bar{u}$, $V_1 = \bar{v}$, $W_1 = \bar{w}$. Dann sind die Komponenten L_1 M_1 N_1 der von den Strömen ausgeübten magnetischen Kraft zufolge der üblichen Elektrodynamik gegeben durch die Gleichungen:

$$1) \quad \begin{aligned} L_1 &= A\left(\frac{dV_1}{dz} - \frac{dW_1}{dy}\right) \quad , \\ M_1 &= A\left(\frac{dW_1}{dx} - \frac{dU_1}{dz}\right) \quad , \\ N_1 &= A\left(\frac{dU_1}{dy} - \frac{dV_1}{dx}\right) \quad , \end{aligned} \qquad \frac{dU_1}{dx} + \frac{dV_1}{dy} + \frac{dW_1}{dz} = 0 \quad .$$

Aus dem Vorhandensein dieser Kräfte läfst sich nach dem Prinzipe von der Erhaltung der Kraft folgern, und ist gefolgert worden, dafs bei Änderungen von u v w elektrische Kräfte auftreten, deren Komponenten X_1 Y_1 Z_1 sind:

$$2) \quad X_1 = -A^2 \frac{dU_1}{dt} \quad , \quad Y_1 = -A^2 \frac{dV_1}{dt} \quad , \quad Z_1 = -A^2 \frac{dW_1}{dt} \quad .$$

Die Ausdrücke für diese Kräfte gelten ebensowohl für das

Digitized by Google

Innere der Leiter, in welchen die Ströme u v w fliefsen, als für den äufseren Raum. Die Kräfte (2) sind aus den Kräften (1) gefolgert unter der Voraussetzung, dafs letztere von elektrischen Strömen herrühren. Aber auf Grund unserer Prämissen dürfen wir behaupten, dafs wenn auch die Kräfte (1) in einem beliebigen Systeme veränderlicher Ströme und veränderlicher Magnete ihren Ursprung haben, dafs darum nicht minder ihre Veränderung begleitet sein mufs von dem Auftreten der Kräfte (2). Es sei A das beliebige System, welches Kräfte der Form (1) hervorruft. Wir superponieren ihm ein anderes B, welches nur aus elektrischen Strömen besteht und doch die von A ausgeübten Kräfte überall aufhebt. Ein solches System ist möglich, wir haben ja nur als Stromkomponenten u, v, w überall zu setzen $4\pi u = \Delta U_1$, $4\pi v = \Delta V_1$, $4\pi w = \Delta W_1$. Bewegen wir nun elektrische Ströme unter dem Einflusse beider Systeme A und B zusammen, so ist mit dieser Bewegung keine Arbeitsleistung verbunden. Daher kann auch die zur Unterhaltung der Ströme erforderliche elektromotorische Kraft nicht abhängig sein von der Bewegung, also ist die induzierte elektromotorische Kraft Null. Aber das System B für sich übt Induktionswirkung aus, und es mufs also das System A ebenfalls Wirkungen ausüben, die jenen von B entgegengesetzt gleich sind, die also gleich sind denen eines rein elektrischen Systemes, welches gleiche magnetische Kräfte wie A ausübt. Was für die Induktionswirkungen durch Bewegung gilt, mufs auch für diejenigen durch Intensitätsänderungen gelten, beide sind nach dem Prinzipe von der Erhaltung der Kraft in einfachster Weise durch einander bestimmt. Also können wir unmittelbar aus dem Vorhandensein magnetischer Kräfte von der Form (1) schliefsen auf das Auftreten elektrischer Kräfte von der Form (2), gleichgültig welches der Ursprung jener magnetischen Kräfte sei.

Richten wir nun unser Augenmerk auf magnetische Ströme. Seien λ, μ, ν die Komponenten der magnetischen Polarisation im ganzen Raume, sei:

$$\frac{d\lambda}{dx} + \frac{d\mu}{dy} + \frac{d\nu}{dz} = 0 \quad \text{und} \quad L = \bar{\lambda}, \; M = \bar{\mu}, \; N = \bar{\nu}.$$

Diese Gröfsen sollen in absolutem magnetischen Mafse ge-

Digitized by Google

messen sein. Es ist dann, wie aus den Kräften (1) nach dem Prinzipe der Erhaltung der Kraft abgeleitet wird, und wie auch in der Elektrodynamik allgemein angenommen wird, die bei Veränderungen von λ, μ, ν auftretende elektrische Kraft gegeben durch die Komponenten:

$$X_1 = A\frac{d}{dt}\left(\frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dz}\right) \quad , \qquad Y_1 = A\frac{d}{dt}\left(\frac{dA}{dz} - \frac{dN}{dx}\right) \quad ,$$

$$Z_1 = A\frac{d}{dt}\left(\frac{dM}{dz} - \frac{dA}{dy}\right) \quad .^{1})$$

Wir setzen nun mit Einführung unserer Bezeichnungsweise:

$$p = \frac{d\lambda}{dt} \quad , \qquad q = \frac{d\mu}{dt} \quad , \qquad r = \frac{d\nu}{dt} \quad ,$$

und nennen p, q, r die Komponenten der magnetischen Strömung. Wir machen ferner $P_1 = \bar{p}$, $Q_1 = \bar{q}$, $R_1 = \bar{r}$ und bezeichnen P_1, Q_1, R_1 als die Komponenten des Vektorpotentiales dieser Strömung. Es werden alsdann die von der magnetischen Strömung hervorgerufenen elektrischen Kräfte:

$$3) \qquad \begin{aligned} X_1 &= A\left(\frac{dR_1}{dy} - \frac{dQ_1}{dz}\right) \quad , \\ Y_1 &= A\left(\frac{dP_1}{dz} - \frac{dR_1}{dx}\right) \quad , \qquad \frac{dP_1}{dx} + \frac{dQ_1}{dy} + \frac{dR_1}{dz} = 0 \quad . \\ Z_1 &= A\left(\frac{dQ_1}{dx} - \frac{dP_1}{dy}\right) \quad , \end{aligned}$$

Dieselben Überlegungen, welche uns aus den Kräften (1) erschliefsen lassen, dafs das Potential der elektrischen Stromsysteme u_1, v_1, w_1 und u_2, v_2, w_2 aufeinander die Form

$$A^2 \iint \frac{1}{r}(u_1u_2 + v_1v_2 + w_1w_2)\, d\tau_1 d\tau_2$$

habe, führen uns bei Anwendung auf die Kräfte (3) zu dem Schlusse, dafs die magnetischen Stromsysteme p_1, q_1, r_1 und p_2, q_2, r_2 aufeinander das Potential

$$A^2 \iint \frac{1}{r}(p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2)\, d\tau_1\, d\tau_2$$

---

[1]) Vgl. v. Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen, Bd. 1, S. 619.

Digitized by Google

besitzen. Dieselben Überlegungen, welche uns aus jenem Potentiale elektrischer Ströme die induzierten Kräfte (2) folgern liefsen, lassen uns aus diesem Potentiale magnetischer Ströme schliefsen auf induzierte magnetische Kräfte von der Form:

$$L_1 = -A^2 \frac{dP_1}{dt} , \quad M_1 = -A^2 \frac{dQ_1}{dt} , \quad N_1 = -A^2 \frac{dR_1}{dt} . \qquad 4)$$

Auch hier dürfen wir behaupten, dafs diese Kräfte ebensowohl im Inneren der magnetischen Körper auftreten werden, als im äufseren Raum, auch hier können wir uns überzeugen, dafs wir den Zusammenhang der Kräfte (3) und (4) nicht wohl beschränken dürfen auf den Fall, dafs die Kräfte (3) nur von magnetischen Strömen ausgehen, sondern dafs wir aussagen müssen: Sobald ein System von Strömen oder Magneten Anlafs giebt zu elektrischen Kräften der Form (3), sobald wird die Veränderung dieses Systemes Anlafs geben zu magnetischen Kräften der Form (4).

Soweit haben wir nur die Resultate des vorigen Abschnittes in präziserer Form wiederholt. Wir gehen nun weiter, indem wir schliefsen: Ein System veränderlicher Ströme übt elektrische Kräfte aus von der Form (2). Dieselben lassen sich darstellen in der Form (3). Sind sie also nicht konstant, so werden sie Anlafs geben zu magnetischen Kräften der Form (4). Diese werden als Korrektionsglied zu den bekannten magnetischen Kräften der Form (1) hinzuzufügen sein. Um nun die Darstellung der Kräfte (2) in der Form (3) zu erhalten, setzen wir:

$$-A^2 \frac{dU_1}{dt} = A\left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}\right) ,$$

$$-A^2 \frac{dV_1}{dt} = A\left(\frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx}\right) ,$$

$$-A^2 \frac{dW_1}{dt} = A\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) .$$

Indem wir die Gleichung:

$$\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} = 0 , \qquad \alpha)$$

vorläufig annehmen, erhalten wir durch Differentiation der

Digitized by Google

zweiten Gleichung nach z, der dritten nach y und Subtraktion der dritten von der zweiten:

$$-A\frac{d}{dt}\left(\frac{dV_1}{dz}-\frac{dW_1}{dy}\right)=\Delta P\ ,\ \text{und hieraus:}$$

$$P=\frac{1}{4\pi}A\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dz}\overline{V}_1-\frac{d}{dy}\overline{W}_1\right)\ .$$

Entsprechende Ausdrücke werden für Q und R erhalten. Man überzeugt sich leicht, dafs sie der Gleichung α) genügen, so dafs die vorläufige Annahme der letzteren erlaubt war. Aus den Werten P, Q, R ergeben sich die bei ihren Änderungen auftretenden magnetischen Kräfte, die in Richtung der x auftretende wird:

$$-A^2\frac{dP}{dt}=-\frac{1}{4\pi}A^3\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{d}{dz}\overline{V}_1-\frac{d}{dy}\overline{W}_1\right)\ .$$

Dieses Glied haben wir zu der vorher angenommenen Kraftkomponente L_1 hinzuzuaddieren; nennen wir die korrigierte Komponente L_2 und bilden ebenso die korrigierten Komponenten M_2 und N_2, so lassen diese Kräfte sich darstellen durch das System:

$$5)\qquad \begin{aligned} L_2&=A\left(\frac{dV_2}{dz}-\frac{dW_2}{dy}\right)\ ,\\ M_2&=A\left(\frac{dW_2}{dx}-\frac{dU_2}{dz}\right)\ ,\qquad \frac{dU_2}{dx}+\frac{dV_2}{dy}+\frac{dW_2}{dz}=0\ ,\\ N_2&=A\left(\frac{dU_2}{dy}-\frac{dV_2}{dx}\right)\ , \end{aligned}$$

worin jetzt gesetzt ist:

$$U_2=U_1-\frac{1}{4\pi}A^2\frac{d^2}{dt^2}\overline{U}_1\ ,\qquad V_2=V_1-\frac{1}{4\pi}A^2\frac{d^2}{dt^2}\overline{V}_1\ ,$$

$$W_2=W_1-\frac{1}{4\pi}A^2\frac{d^2}{dt^2}\overline{W}_1\ .$$

Nach dem vorher Ausgeführten werden wir unmittelbar schliefsen dürfen, dafs die elektromotorischen Kräfte, welche bei Veränderung des Stromsystemes auftreten, auch nicht mehr

Digitized by Google

exakt die Form (2) haben, dafs vielmehr ihre korrigierten Werte sein werden:

$$X_2 = -A^2 \frac{dU_2}{dt}, \quad Y_2 = -A^2 \frac{dV_2}{dt}, \quad Z_2 = -A^2 \frac{dW_2}{dt}. \quad 6)$$

Ganz gleiche Schlüsse werden uns nun zwingen, die durch die Gleichungen 3) und 4) dargestellten Wirkungen magnetischer Ströme zu verbessern. Die Resultate mögen andeutungsweise dargestellt werden durch die Gleichungen:

$$X_2 = A\left(\frac{dR_2}{dy} - \frac{dQ_2}{dz}\right), \quad \text{u. s. w.,} \quad 7)$$

$$L_2 = -A^2 \frac{dP_2}{dt}, \quad \text{u. s. w., worin:} \quad 8)$$

$$P_2 = P_1 - \frac{1}{4\pi} A^2 \frac{d^2}{dt^2} \overline{P}_1, \quad \text{u. s. w. ist.}$$

Wenn man die Kräfte, durch welche sich die verbesserten Werte der Gleichungen 5) und 7) unterscheiden von den gewöhnlich angenommenen Werten (1) und (3), in der Natur getrennt von diesen darzustellen wünscht, so hat man nur nötig, ein solches System elektrischer oder magnetischer Ströme zu bilden, dafs die Kräfte (1), resp. (3) in demselben fortfallen. Ein jedes in sich selbst zurücklaufende elektrische oder magnetische Solenoid bietet ein Beispiel dar.

Man erkennt unmittelbar, dafs wir bei dem gewonnenen Resultate nicht als bei dem endgültigen kann stehen bleiben. In der That erschlossen wir ja die Kräfte (5) mit Hilfe der Kräfte (2); nun haben sich die Kräfte (2) als ungenau erwiesen und den Kräften (6) Platz gemacht, wir müssen daher unseren Schlufs mit diesen Kräften wiederholen. Das Resultat ist leicht zu überblicken; wir erhalten es, wenn wir überall den Index 2 mit dem Index 3 vertauschen und setzen:

$$U_3 = U_1 - \frac{A^2}{4\pi} \frac{d^2}{dt^2} \overline{U}_2 = U_1 - \frac{A^2}{4\pi} \frac{d^2}{dt^2} \overline{U}_1 + \frac{A^4}{16\pi^4} \frac{d^4}{dt^4} \overline{\overline{U}}_1$$

und entsprechend für die übrigen Komponenten der Vektorpotentiale. Auch die hier in den magnetischen Kräften elektrischer Ströme und den elektrischen Kräften magnetischer

Digitized by Google

Ströme neu auftretenden und mit dem Faktor A^5 behafteten Glieder lassen sich von den Gliedern niederer Ordnung getrennt zur Wahrnehmung bringen. Wir haben nur nötig, ein gewöhnliches elektrisches oder magnetisches Solenoid, ein Solenoid erster Ordnung, wie wir sagen können, selbst wieder zu einem Solenoid, einem Solenoid zweiter Ordnung zusammenzurollen, um ein System zu erhalten, in welchem die hier berechneten Kräfte die gröfsten überhaupt auftretenden sind. Aus der Betrachtung solcher Solenoide kann man die Existenz der einzelnen Glieder nachweisen, unabhängig davon, ob man anerkennt oder nicht, dafs dieselben sich zum Gesamtresultate durch einfache Addition zusammenfügen.

Unsere Schlufsfolgerung gestattet uns nun nirgends stillzustehen, sondern sie bringt zu den vorhandenen in gleicher Weise stets neue und neue Glieder hinzu und führt so auf eine unendliche Reihe. Das Endresultat darzustellen, nennen wir L, M, N, X, Y, Z die vollständig korrigierten Kräfte und erhalten:

9)
$$\begin{cases} L = A\left(\dfrac{dV}{dz} - \dfrac{dW}{dy}\right) , \\ M = A\left(\dfrac{dW}{dx} - \dfrac{dU}{dz}\right) , \\ N = A\left(\dfrac{dU}{dy} - \dfrac{dV}{dx}\right) , \end{cases} \qquad 10) \quad \begin{cases} X = -A^2 \dfrac{dU}{dt} , \\ Y = -A^2 \dfrac{dV}{dt} , \\ Z = -A^2 \dfrac{dW}{dt} , \end{cases}$$

worin jetzt $U V W$ sind:

$$U = \bar{u} - \frac{A^2}{4\pi}\frac{d^2}{dt^2}\bar{\bar{u}} + \frac{A^4}{16\pi^2}\frac{d^4}{dt^4}\bar{\bar{\bar{u}}} - \cdots\cdots$$

$$V = \bar{v} - \frac{A^2}{4\pi}\frac{d^2}{dt^2}\bar{\bar{v}} + \frac{A^4}{16\pi^2}\frac{d^4}{dt^4}\bar{\bar{\bar{v}}} - \cdots\cdots$$

$$W = \bar{w} - \frac{A^2}{4\pi}\frac{d^2}{dt^2}\bar{\bar{w}} + \frac{A^4}{16\pi^2}\frac{d^4}{dt^4}\bar{\bar{\bar{w}}} - \cdots\cdots$$

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = 0 \quad .$$

Die entsprechenden Gleichungen gelten für magnetische Ströme. Konvergieren die Reihen, so haben wir keinen Grund

Digitized by Google

zu zweifeln, dafs sie uns die wahren Werte geben. Im allgemeinen aber werden sie konvergieren. Beachten wir etwa dasjenige Element des Integrales U, welches von der Strömung u in einem bestimmten Raumelemente herrührt. Zerlegen wir diese Strömung als Funktion der Zeit nach Kreisfunktionen, und sei $u_0 \sin nt$ derjenige Teil dieser Zerlegung, welcher den Faktor $\sin nt$ enthält. Dann wird dasjenige Element von U, welches von diesem Theile herrührt, gegeben durch die Gleichung:

$$dU = d\tau \frac{u_0 \sin nt}{r} \left(1 - \frac{1}{1.2} \frac{A^2}{4\pi} n^2 r^2 + \frac{1}{1.2.3.4} \frac{A^4}{16\pi^2} n^4 r^4 - \cdots\right) .$$

Diese Reihe aber konvergiert gegen einen leicht angebbaren Grenzwert. Sind n und r nicht sehr grofs, so wird sogar jedes Glied gegen das Vorhergehende von den ersten Gliedern an verschwindend klein sein. Es wird also auch das Integral über die Elemente von U einen bestimmten Wert haben, und da das gleiche für V, W, P, Q und R gilt, so dürfen wir erwarten, in den Gleichungen 9), 10) und den entsprechenden für die magnetischen Ströme ein mit allen unseren Forderungen in Einklang befindliches System von Kräften gefunden zu haben.

3. Es fällt nun in die Augen, dafs sich dies System in einfacherer Weise, als es durch die Gleichungen 9) und 10) geschieht, darstellen, oder wie der terminus technicus lautet, beschreiben läfst. Zufolge jener Gleichungen haben wir:

$$\Delta U = -4\pi u + A^2 \frac{d^2}{dt^2} \bar{u} - \cdots\cdots$$

und

$$A^2 \frac{d^2 U}{dt^2} = A^2 \frac{d^2}{dt^2} \bar{u} - \cdots\cdots ,$$

also $\Delta U - A^2 d^2U/dt^2 = -4\pi u$. Den analogen Differentialgleichungen genügen die übrigen Komponenten der Vektorpotentiale, sowohl der elektrischen als der magnetischen Ströme. Da im leeren Raume u, v, w, p, q, r gleich Null sind, so ist hier die Verbreitung dieser Potentiale gegeben durch die Gleichungen:

Digitized by Google

$$\Delta U - A^2 \frac{d^2 U}{dt^2} = 0 , \qquad \Delta P - A^2 \frac{d^2 P}{dt^2} = 0 ,$$

$$\Delta V - A^2 \frac{d^2 V}{dt^2} = 0 , \qquad \Delta Q - A^2 \frac{d^2 Q}{dt^2} = 0 ,$$

11)

$$\Delta W - A^2 \frac{d^2 W}{dt^2} = 0 , \qquad \Delta R - A^2 \frac{d^2 R}{dt^2} = 0 ,$$

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = 0 , \qquad \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} = 0 .$$

Es stellen sich demnach jetzt die Vektorpotentiale als Gröfsen dar, welche sich mit endlicher Geschwindigkeit — der Lichtgeschwindigkeit — ausbreiten, und zwar nach den gleichen Gesetzen, wie die Schwingungen des Lichtes und der strahlenden Wärme. Gleiche, resp. ganz ähnliche Gesetze für die Ausbreitung der Potentiale haben im Jahre 1858 Riemann und im Jahre 1867 Lorenz angenommen, in dem Wunsche, die optischen und elektrischen Erscheinungen unter gemeinsamen Gesichtspunkten zu vereinigen. Dafs durch diese Gesetze den geltenden Kräften der Elektrodynamik neue Glieder hinzugefügt wurden, entschuldigten diese Forscher damit, dafs diese Glieder zu klein seien, als dafs sie sich in den Experimenten hätten bemerkbar machen können. Wir sehen aber, dafs die Hinzufügung dieser Glieder weit entfernt ist, einer Entschuldigung zu bedürfen, dafs sie viel eher geboten ist, und dafs das Fehlen dieser Glieder die Verletzung ganz allgemein angenommener Prinzipien involvieren müfste.

Die Vektorpotentiale elektrischer und magnetischer Ströme traten bisher als etwas Verschiedenes auf und aus ihnen leiteten sich die elektrischen und magnetischen Kräfte in asymmetrischer Weise ab. Dieser Gegensatz zwischen beiden Arten von Kräften verschwindet, sobald wir versuchen, die Ausbreitung dieser Kräfte selbst zu bestimmen, d. h. sobald wir die Vektorpotentiale aus den Gleichungen eliminieren. Das kann einmal geschehen, indem man die Gleichungen 9) nach t differenziert, und die Differentialquotienten von UVW nach t mit Hilfe der Gleichungen 10) entfernt, zweitens kann es geschehen, indem man die Gleichungen 10) nach t differenziert, sich erinnert, dafs z. B.:

Digitized by Google

$$A^2\frac{d^2U}{dt^2} = \Delta U = \frac{d}{dy}\left(\frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx}\right) - \frac{d}{dz}\left(\frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz}\right)$$

ist, und nun die in Klammern stehenden Kombinationen der UVW mittels der Gleichungen 9) fortschafft. Auf diese Weise erhält man sechs Gleichungen, welche die L, M, N, X, Y, Z im leeren Raume miteinander verknüpfen, nämlich die folgenden:

$$\begin{aligned} A\frac{dL}{dt} &= \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, & A\frac{dX}{dt} &= \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}, \\ A\frac{dM}{dt} &= \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, & A\frac{dY}{dt} &= \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz}, \\ A\frac{dN}{dt} &= \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}, & A\frac{dZ}{dt} &= \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx}. \end{aligned} \qquad 12)$$

Dieselben Gleichungen verknüpfen auch diejenigen Kräfte, welche von magnetischen Strömen erzeugt werden, denn sie werden ebensowohl durch Elimination der P, Q, R als der U, V, W erhalten. Sie verknüpfen daher die magnetischen und elektrischen Kräfte im leeren Raume überhaupt, unabhängig vom Ursprunge der letzteren. Die magnetischen und elektrischen Kräfte sind jetzt miteinander vertauschbar. Eliminiert man einmal die einen, das anderemal die anderen, so erhält man das folgende System, welches indessen das System 12) nicht völlig ersetzt:

$$\begin{aligned} \Delta L - A^2\frac{d^2L}{dt^2} &= 0, & \Delta X - A^2\frac{d^2X}{dt^2} &= 0, \\ \Delta M - A^2\frac{d^2M}{dt^2} &= 0, & \Delta Y - A^2\frac{d^2Y}{dt^2} &= 0, \\ \Delta N - A^2\frac{d^2N}{dt^2} &= 0, & \Delta Z - A^2\frac{d^2Z}{dt^2} &= 0, \\ \frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} &= 0, & \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} &= 0. \end{aligned} \qquad 13)$$

Das durch die Gleichungen 12) und 13) gelieferte System von Kräften ist nun kein anderes als das von Maxwell angegebene. Maxwell gelangte zu demselben, indem er den Äther als ein Dielektrikum ansah, dessen Polarisation bei ihrer

Digitized by Google

Veränderung die Wirkungen elektrischer Ströme ausübt. Wir sind zu demselben gelangt auf Grund anderer, auch von den Gegnern jener FARADAY-MAXWELL'schen Anschauung im allgemeinen anerkannter Prämissen. Die Gleichungen 12) und 13) erscheinen uns als eine notwendige Vervollständigung der gewöhnlich als exakt angesehenen Gleichungen 1), 2) und 3). Die FARADAY-MAXWELL'sche Anschauung giebt von unserem Standpunkte aus nicht die Begründung, wohl aber die einfachste Deutung des Gleichungssystemes 12) und 13). In MAXWELL's Theorie beziehen sich die Gleichungen 12) und 13) nicht allein auf den leeren Raum, sondern ebenso gut auf jedes andere Dielektrikum. Auch von unseren Prämissen ausgehend, können wir diese Gesetze als in jedem homogenen Medium geltend ableiten. Als erfahrungsmäfsig feststehend müssen wir die Thatsache annehmen, dafs die magnetischen Kräfte, welche ein in das homogene Medium eingesenktes Stromsystem umgeben, dieselbe durch die Gleichungen 1) gegebene Verteilung besitzen, wie im leeren Raume. Wir haben uns daher nur die Leiter und Eisenmassen, welche wir zu unseren Überlegungen benutzen, vollständig in das betreffende Medium eingetaucht zu denken, wir haben in diesem Medium die Einheit der Elektricität und des Magnetismus durch dieselben Worte zu definieren, durch welche dies sonst für den leeren Raum geschieht, wir haben alsdann die Konstante A zu bestimmen, welche uns die absolute Gröfse der magnetischen Kraft giebt, die der in dem neuen elektrostatischen Mafse gemessene Strom Eins zur Folge hat — alle weiteren Kräfte ergeben sich als Folgerungen aus der angenommenen Erfahrungsthatsache und den allgemeinen Prämissen, und da sämtliche Schlüsse die gleichen sind, wie für den leeren Raum, so ist auch das Endresultat das gleiche. Die Konstante A allerdings wird einen anderen Wert annehmen, als im leeren Raume, und einen verschiedenen für verschiedene Medien. Ihr reciproker Wert ist allemal die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektrischer und magnetischer Änderungen. Sie ist eine innere Konstante, aber auch die einzige innere elektrodynamische Konstante des Mediums; die beiden Konstanten, aus welchen man sie gewöhnlich zusammensetzt, nämlich die Dielektricitäts- und die Magnetisierungskonstante sind im Gegensatze zu ihr

Digitized by Google

als äufsere Konstanten zu bezeichnen; nicht allein die Messung, sondern auch die Definition der letzteren ist unmöglich, sobald nicht mindestens zwei Medien (von denen das eine der leere Raum sein kann) gegeben sind.

Ich habe im Vorhergehenden versucht, die Gültigkeit der MAXWELL'schen Gleichungen nachzuweisen auf Grund von Prämissen, welche auch von der gegnerischen Elektrodynamik zugegeben werden und unter Benutzung von Schlufsreihen, welche dieser Elektrodynamik geläufig sind. Ich habe mich deshalb in der Anschauungsweise dieser Elektrodynamik bewegt; keineswegs soll die gegebene Ableitung aufserhalb dieses Zusammenhanges als exakter Beweis dafür ausgegeben werden, dafs das MAXWELL'sche System das einzig mögliche sei. Ein solcher Beweis allein aus unseren Prämissen erscheint selbst unmöglich; das Genaue kann aus dem Ungenauen wohl als das von gewissem Standpunkte aus Nächstliegende, nicht aber als etwas Notwendiges abgeleitet werden.[1]) Soviel scheint mir indes aus dem Vorhergehenden ohne Einwand zu folgern erlaubt: Wenn nur die Wahl vorliegt zwischen dem gewöhnlichen Systeme der Elektrodynamik und dem MAXWELL'schen, so gebührt dem letzteren unbedingt der Vorzug. Die Begründung ist diese:

1) Das auf unvermittelte Fernwirkung gegründete System der elektrodynamischen Wirkung geschlossener Ströme in seinem gegenwärtigen Zustande ist sicherlich unvollständig. Entweder es mufs mehrere verschiedene Arten elektrischer

---

[1]) Den Punkt, an welchem im Vorhergehenden nur das Nächstliegende, nicht das Notwendige abgeleitet wurde, bildete offenbar jedesmal die Art, in welcher aus dem Prinzipe der Erhaltung der Kraft gefolgert wurde. Diese Art ist die nächstliegende vom Standpunkte der üblichen Elektrodynamik aus, denn sie entspricht genau dem anerkannten Schlusse, mittels dessen v. HELMHOLTZ 1847 und Sir W. THOMSON 1848 die Induktion aus der elektrodynamischen Wirkung folgerten. Aber sie ist vielleicht nicht die einzig mögliche, denn ebenso wie jenem Schlusse liegen auch ihr neben dem Prinzipe von der Erhaltung der Kraft noch stillschweigende Voraussetzungen zu Grunde. Auch jener Schlufs könnte nicht gezogen werden, wollte man die Möglichkeit zulassen, dafs die Bewegung der Metalle im magnetischen Felde an sich Wärme erzeugen könnte, dafs der Widerstand der Leitungen abhängen könnte von jener Bewegung, und dergleichen mehr.

Digitized by Google

Kraft einführen, was es nie gethan hat —, oder es mufs das Vorhandensein von Wirkungen zugeben, welche ihm bisher fehlen. Das MAXWELL'sche System trägt nicht in gleicher Weise in sich den Beweis seiner Unvollständigkeit.

2) Sucht man das übliche System der Elektrodynamik zu vervollständigen, so kommt man unter allen Umständen zu sehr verwickelten und schwer zu handhabenden Gesetzen. Und entweder man weigert sich, die gehäuften Schlüsse des Abschnittes 2 anzuerkennen — dann endet man mit einer unfruchtbaren Inkompetenzerklärung —, oder man erkennt dieselben, wie es vom Standpunkte des Systemes aus billig erscheint, als bündig an, so gelangt man zu Kräften, welche der Sache nach übereinstimmen mit den vom MAXWELL'schen Systeme geforderten. Aber das letztere bietet dann eine ungleich einfachere Darstellungsweise dieses Resultates.

3) Die Bedenken, welche man gegen die weitergehenden Schlüsse des Abschnittes 2 etwa erheben kann, treffen nicht die im Abschnitte 1 besonders dargestellte Schlufsfolge, welche uns die Anziehung zwischen magnetischen Strömen lehrte. Diese letztere hängt direkt ab von den Prämissen, sie fällt nur zugleich mit diesen, aber sie reicht aus, dem MAXWELL'schen Systeme das Übergewicht zu verleihen, denn sie ist angezeigt in diesem Systeme, sie ist unbekannt in der gegnerischen Elektrodynamik.

Digitized by Google

18. Über die Dimensionen des magnetischen Poles in verschiedenen Maßsystemen.

Aus Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie.
Bd. 24, S. 114—118, 1885.

Vor zwei Jahren wurde, zum Teil in diesen Annalen[1]), lebhafter noch im Philosophical Magazine eine Diskussion geführt über den in der Überschrift genannten Gegenstand. Dieselbe ist nun zwar im allgemeinen als abgeschlossen zu betrachten, in einem Punkte jedoch ist, wie ich glaube, noch eine vollständigere Aufklärung möglich, was bei einer prinzipiell so wichtigen Frage nicht gleichgültig ist. Es zeigte sich nämlich ein gewisser Gegensatz zwischen dem elektrodynamischen[2]) (oder magnetischen) Maſssysteme und dem elektrostatischen. Während in ersterem Übereinstimmung herrschte nicht nur in Bezug auf den magnetischen Pol, von welchem man ausging, sondern auch in Bezug auf den elektrischen Pol, dessen Dimensionen abgeleitet wurden, war in letzterem eine Meinungsverschiedenheit möglich, nicht zwar in Bezug auf den elektrischen Pol, von welchem man ausging, wohl aber in Bezug auf den abgeleiteten magnetischen Pol. Neben das Maxwell'sche elektrostatische System trat das Clausius'sche. Wurde es nun auch klar, daſs keines von diesen beiden falsch sein müsse, sondern daſs nur über die gröſseren oder geringeren Vorzüge des einen wie des anderen gestritten werden könne, so mag doch bei vielen Physikern das Gefühl zurückgeblieben

[1]) Vgl. Clausius, Wied. Ann. Bd. 16, S. 529, 1882. Bd. 17, S. 713, 1882; v. Helmholtz, Wied. Ann. Bd. 17, S. 42, ferner eine Reihe von Aufsätzen im Phil. Mag. (Ser. 5) Bd. 13 u. 14, 1882.

[2]) in der Bezeichnungsweise von Clausius.

Digitized by Google

sein, als seien beide, und damit das elektrostatische System überhaupt im Nachteile gegen das magnetische, in welchem Zweifel gar nicht aufkamen, und als sei man bei Anwendung des letzteren vor Gefahren geschützt, welche bei Benutzung des ersteren unzweifelhaft nahe lagen. Dafs diese Anschauung irrig wäre, zeige ich, indem ich den Annahmen, von welchen MAXWELL und CLAUSIUS ausgingen, zwei andere gegenüberstelle, welche zwar nicht praktisch, wohl aber theoretisch ebenso gerechtfertigt sind wie jene, und bei deren Benutzung das magnetische und das elektrostatische System genau ihren Platz vertauschen. Wäre man ursprünglich von diesen neuen Annahmen ausgegangen, statt von den alten, so hätte Einstimmigkeit geherrscht in Bezug auf das elektrostatische, Diskussion in Bezug auf das magnetische System. Dies zeigt deutlich a posteriori, was freilich auch a priori zu erweisen ist, dafs keines dieser beiden Systeme allgemein vorteilhafter oder sicherer ist, als das andere, sondern nur vorteilhafter für ein bestimmtes Gebiet der Elektrodynamik, sicherer in Bezug auf eine bestimmte elektrodynamische Rechnung. Es ist in gewissem Sinne Zufall, dafs sich die Diskussion im elektrostatischen und nicht im magnetischen Systeme erhob. Ich stelle die alten und die neuen Annahmen mit ihren Folgerungen als These und Antithese gegenüber.

Die These ist dann:

a) Die Arbeit A, welche erforderlich ist, einen magnetischen Pol m um einen konstanten elektrischen Strom, der in der Zeit t die Menge e fördert, in geschlossener Bahn einmal herum zu bewegen, ist proportional der Stärke m des Poles und der Intensität e/t des Stromes, sie ist unabhängig von den räumlichen Abmessungen. Setzen wir also $A = k_1 me/t$, so ist k_1 eine Konstante, deren Gröfse und Dimension nur abhängt von dem gewählten Mafssysteme. MAXWELL hält es für das vorteilhafteste, elektrische und magnetische Gröfsen so zu verknüpfen, dafs diese Konstante eine dimensionslose Zahl wird. Dann ist in üblicher Bezeichnungsweise:

$$(M) \qquad [m][e] = ML^2T^{-1} \quad .$$

b) Das Moment $m \cdot \delta$ eines magnetischen Doppelpunktes, welcher einen kleinen Kreisstrom für die Rechnung vollständig

Digitized by Google

ersetzt, ist proportional der Intensität e/t des Stromes und der umströmten Fläche f. Es ist also $m\delta = k_2 ef/t$, wo auch k_2 eine nur von den Maſseinheiten abhängige Konstante ist. Ist k_1 eine reine Zahl, so wird es im allgemeinen k_2 nicht sein, und umgekehrt. CLAUSIUS hält es nun in Rücksicht auf die AMPÈRE'sche Theorie für geboten, die magnetischen und elektrischen Gröſsen so zu verknüpfen, daſs k_2 eine dimensionslose Zahl werde, wo sich dann ergiebt:

$$[m] = [e] L T^{-1} \quad . \qquad (C)$$

Die Konsequenzen der Annahme (M) und (C) sind die folgenden:

1. Im magnetischen Systeme ist die Ausgangsdimension: $[m] = M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}$. Also ergiebt sich die abgeleitete des elektrischen Poles:

$$\text{nach } (M): \quad M^{1/2} L^{1/2} \quad , \qquad \text{nach } (C): \quad M^{1/2} L^{1/2} \quad .$$

Es herrscht also Übereinstimmung.

2. Im elektrostatischen Systeme ist die Ausgangsdimension die des elektrischen Poles: $[e] = M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}$. Und also ergiebt sich die abgeleitete des magnetischen Poles:

$$\text{nach } (M): \quad M^{1/2} L^{1/2} \quad , \qquad \text{nach } (C): \quad M^{1/2} L^{5/2} T^{-2} \quad .$$

Beide Ausdrücke sind verschieden, und dieser Umstand erscheint als Nachteil des elektrostatischen Systemes.

Um nun die Antithese aufzustellen, benutze ich den Ausdruck „magnetischer Strom". [1]) Ein konstanter magnetischer Strom wird dargestellt durch einen drahtförmigen Ringmagnet, welcher in gleichen Zeiten gleiche Mengen Magnetismus erwirbt oder verliert. Für hinreichend kurze Zeiten können wir einen solchen Strom in beliebiger Stärke herstellen, und für beliebig lange Zeiten, wenn wir ihn hinreichend schwach machen. Die elektrischen Kräfte, welche ein solcher Strom ausübt, sind bekannt, und jede Elektrodynamik lehrt, wenn auch in anderer Bezeichnungsweise das Folgende:

a) Die Arbeit A, welche erforderlich ist, um einen elektrischen Pol e um einen konstanten magnetischen Strom, wel-

[1]) Siehe No. 17 S. 299.

Digitized by Google

cher in der Zeit t die Menge m fördert, in geschlossener Bahn einmal herumzubewegen, ist proportional der Stärke e des Poles und der Intensität m/t des Stromes, sie ist unabhängig von den räumlichen Abmessungen. Setzen wir also $A = k_1' e.m/t$, so gilt von k_1' das von k_1 und k_2 Ausgesagte. Man kann es nun, etwa in der Theorie der unipolaren Induktion, für vorteilhaft halten, gerade diese Gleichung als Grundgleichung für die Verknüpfung anzusehen, und k_1' zu einer reinen Zahl zu machen; man gelangt so zu dieser Annahme:

$$(M') \qquad [m][e] = ML^2T^{-1} \quad ,$$

welche übrigens mit (M) übereinstimmt.

b) Ein elektrischer Doppelpunkt kann für die Rechnung vollständig ersetzt werden durch einen kleinen magnetischen Kreisstrom, dessen Ebene senkrecht zur Axe des Doppelpunktes steht. Dabei muſs das Moment $e.\delta$ des Doppelpunktes proportional sein der Intensität m/t des Stromes und der umströmten Fläche f. Es ist also zu setzen $e\delta = k_2' fm/t$. Es wäre theoretisch nicht unrichtig, wenn auch vom Standpunkte gegenwärtiger Theorien und Anwendungen aus unpraktisch, wenn man von dieser Gleichung ausginge und also k_2' zu einer reinen Zahl machte. Es wäre alsdann:

$$(C') \qquad [e] = [m]LT^{-1} \quad .$$

Die Konsequenzen der Annahmen (M') und (C') sind nun diese:

1. Im magnetischen Systeme ist immer noch:

$$[m] = M^{1/2}L^{3/2}T^{-1} \quad .$$

Also wären die Dimensionen des abgeleiteten elektrischen Poles:

nach (M'): $M^{1/2}L^{1/2}$, nach (C'): $M^{1/2}L^{5/2}T^{-2}$.

Jetzt findet sich also die Unannehmlichkeit, daſs verschiedene Annahmen zu verschiedenen Resultaten führen, im magnetischen Systeme.

2. Im elektrostatischen Systeme ist immer noch:

$$[e] = M^{1/2}L^{3/2}T^{-1} \quad .$$

Also sind hier die Dimensionen des magnetischen Poles:

nach (M'): $M^{1/2}L^{1/2}$, nach (C'): $M^{1/2}L^{1/2}$,

Digitized by Google

und das elektrostatische System genieſst also den Vorteil, welchen wir vorher dem magnetischen beilegen muſsten.

These und Antithese zusammen zeigen die Gleichberechtigung beider Systeme vom rein rechnerischen Standpunkte aus. Praktisch wäre für die auf (M) und (M') begründeten Formen derselben anzuführen, daſs sie die geringsten Ansprüche auf das Gedächtnis machen. Sieht man im Magnetismus nur eine Erscheinungsform bewegter elektrischer Massen, so wird man dem elektrostatischen Systeme in der Form (C) den Vorzug geben, weil bei dieser Anschauung es allein neben dem mathematischen auch den physischen Zusammenhang wiedergiebt. Ich selber glaube stets vor Rechenfehlern am ehesten geschützt gewesen zu sein, wenn ich, dem Rate v. Helmholtz's [1]) folgend, keines jener scheinbar konsequenteren Systeme benutzte, sondern mich an das von ihm als das Gauss'sche bezeichnete System hielt, welches also die Einheiten von Elektricität und Magnetismus getrennt definiert mit den gleichen Dimensionen $[e] = [m] = M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}$, und welches mit Dimensionen behaftete Faktoren da einführt, wo elektrische und magnetische Gröſsen zusammentreffen.

[1]) Siehe Wiedemann's Ann. Bd. 17, S. 48, 1882.

Digitized by Google

19. Graphische Methode zur Bestimmung der adiabatischen Zustandsänderungen feuchter Luft.

Aus der meteorologischen Zeitschrift. Bd. 1, S. 421—431, 1884.

(Hierzu die Tafel am Ende des Buches.)

Betrachtungen über die Zustandsänderungen feuchter Luft, welche ohne Wärmezufuhr zusammengedrückt oder ausgedehnt wird, hat der theoretisierende Meteorologe tagtäglich anzustellen. Daher wünscht derselbe mit möglichst geringem Zeitaufwande Antwort auf die hierher gehörigen Fragen erlangen zu können, und er wird sich nicht gern auf irgend welche komplizierten Formeln der Thermodynamik verweisen lassen. Thatsächlich wird er sich meist an die kleine praktische Tabelle halten, welche Professor Hann im Jahre 1874 mitgeteilt hat.[1]) Doch scheint es, dafs man bei mindestens gleicher Bequemlichkeit eine gröfsere Vollständigkeit erzielen kann, wenn man sich der graphischen Methode bedient, und die beigefügte Tafel stellt einen Versuch in dieser Richtung dar. Theoretisch Neues enthält dieselbe nur insofern, als sie auch das eigentümliche Verhalten wasserhaltiger Luft bei 0° vollständig berücksichtigt, welches, so viel ich weifs, bisher noch nicht behandelt ist.[2]) Ich will nun unter A. die exakten Formeln des Problems zusammenstellen, da eine vollständige Zusammenstellung zu fehlen scheint; unter B. die Wiedergabe der Formeln durch die Tafel

[1]) Siehe die Zeitschr. d. österr. Ges. f. Met. Bd. IX, S. 328.

[2]) [Anm. der Red. der met. Zeitschr.:] Vgl. übrigens Guldberg und Mohn: Études sur les mouvements de l'atmosphère, I. S. 9—16 und dieselben, Österr. Zeitschrift 1878, S. 117—122. [Vgl. hierzu die Nachschrift, S. 337 dieses Bandes.]

Digitized by Google

beschreiben, endlich unter C. die Benutzung der letzteren an einem numerischen Beispiele vollständig, wenn auch rein mechanisch, erläutern. Verfolgt man dieses Beispiel mit der Tafel in der Hand, so gewinnt man ein Urteil über den Nutzen der Tafel und die Kenntnis ihres Gebrauches, ohne dafs man nötig gehabt hätte, sich durch die Rechnungen von A. und B. hindurchzuschlagen.

A. In einem Kilogramm eines Gemenges von Luft und Wasserdampf seien λ Gewichtsteile trockener Luft und μ Gewichtsteile ungesättigten Wasserdampfes enthalten. Der Druck des Gemenges sei p, seine absolute Temperatur T. Es fragt sich: Welche Zustände wird das Gemenge durchlaufen, wenn ohne Wärmezufuhr sein Druck ins Unbegrenzte vermindert wird. Wir müssen verschiedene Stadien unterscheiden.

1. Stadium: Der Dampf ist ungesättigt, flüssiges Wasser nicht vorhanden. Wir nehmen an, dafs der ungesättigte Dampf dem Gay-Lussac-Mariotte'schen Gesetze folge. Ist dann e der Partialdruck des Wasserdampfes, $p-e$ derjenige der trockenen Luft, v das Volumen eines Kilogrammes des Gemenges, so ist

$$p - e = \lambda \frac{RT}{v} \quad , \qquad e = \mu \frac{R_1 T}{v} \quad ,$$

wo R und R_1 Konstanten von bekannter Bedeutung und Gröfse sind. Da nun der Gesamtdruck p die Summe dieser beiden Werte ist, so folgt $pv = (\lambda R + \mu R_1) T$, und dies ist die sogenannte Zustandsgleichung für das Gemenge. Ist ferner c_v die spezifische Wärme bei konstantem Volumen für Luft, c_v' für Wasserdampf, so müssen wir, um die Änderungen dv und dT hervorzurufen, der Luft die Wärmemenge zuführen:

$$dQ_1 = \lambda \left\{ c_v \, dT + ART \frac{dv}{v} \right\} \quad ,$$

dem Wasserdampf hingegen die Wärme

$$dQ_2 = \mu \left\{ c_v' \, dT + AR_1 T \frac{dv}{v} \right\} \quad ,^1)$$

beiden zusammen also die Wärmemenge:

---

[1]) Vgl. Clausius, Mechanische Wärmetheorie. 1876. Bd. I, S. 51.

Digitized by Google

$$dQ = (\lambda c_v + \mu c_v')\, dT + A\,(\lambda R + \mu R_1)\, T \frac{dv}{v} \quad .$$

Diese Wärmemenge soll aber Null sein für die von uns untersuchte Änderung. Um die nach Nullsetzung von dQ entstehende Differentialgleichung zu integrieren, dividieren wir dieselbe durch T. Wir wissen von vornherein aus der mechanischen Wärmetheorie, dafs durch diese Operation die Gleichung integrabel wird, und finden es a posteriori bestätigt. Führen wir die Integration aus und eliminieren v mittels der Zustandsgleichung, indem wir beachten, dafs $c_v + AR$ gleich c_p, der spezifischen Wärme bei konstantem Drucke[1]) ist, so folgt:

I) $$0 = (\lambda c_p + \mu c_p')\log\frac{T}{T_0} - A\,(\lambda R + \mu R_1)\log\frac{p}{p_0} \quad .$$

Die Gröfse, welche die rechte Seite der Gleichung bildet, hat eine physikalische Bedeutung, es ist der Unterschied der Entropie des Gemenges zwischen den beiden Zuständen, welche durch die Gröfsen pT und p_0T_0 charakterisiert sind. Übrigens verhält sich das Gemenge offenbar genau wie ein Gas, dessen Dichte und spezifische Wärme mittlere Werte zwischen denen des Wasserdampfes und der Luft haben.

Es ist nun der Grenzwert von p zu berechnen, bis zu welchem die Gleichung I) benutzt werden darf. Sei jetzt und für das folgende e der Druck des gesättigten Wasserdampfes bei der Temperatur T. e ist eine Funktion von T, aber auch von T allein. Die Menge ν gesättigten Wasserdampfes, welche in dem Volumen v bei der Temperatur T vorhanden ist, beträgt alsdann

a) $$\nu = \frac{ve}{R_1 T}$$

und diese Menge mufs gröfser sein als μ, so lange der Dampf ungesättigt sein soll. Die Grenze tritt also ein, wenn $\mu = \nu$ wird. Setzen wir für v seinen Wert aus der Zustandsgleichung ein, so nimmt diese Bedingung die Form an:

b) $$p = \frac{\lambda R + \mu R_1}{\mu R_1} \cdot e \quad .$$

[1]) Vgl. Clausius, Mechanische Wärmetheorie. 1876. Bd. I, S. 51.

Digitized by Google

Sobald T und p Werte erreichen, welche dieser Gleichung genügen, müssen wir die Gleichung I) verlassen, und übergehen zum

2. Stadium: Die Luft ist mit Wasserdampf gesättigt und enthält neben demselben flüssiges Wasser. Das Volumen des letzteren vernachlässigen wir. Wir können alsdann auch hier die Luft einerseits, das Wasser mit seinem Dampfe andererseits jedes so betrachten, als ob das andere nicht vorhanden wäre. Beiden ist dasselbe Volumen v und dieselbe Temperatur T wie dem Gemenge beizulegen, dagegen ist der Druck p des Gemenges gleich der Summe der Partialdrucke $p_1 = \lambda RT/v$ der Luft und $p_2 = e$ des Wasserdampfes. Die Gleichung

$$p = \lambda \frac{RT}{v} + e \ , \quad \text{oder} \quad (p - e)\, v = \lambda RT$$

ist demnach jetzt die Zustandsgleichung des Gemenges. Die Wärmemenge, welche wir der Luft zuführen müssen, um die Änderungen dT und dv zu erzielen, ist wie vorher

$$dQ_1 = \lambda \left\{ c_v\, dT + ART \frac{dv}{v} \right\} \ ,$$

dagegen die Wärmemenge, welche dem Wasser zugeführt werden mufs, um gleichzeitig die Änderung dT hervorzurufen, und die Menge ν, des dampfförmigen Wassers, um $d\nu$ zu vermehren, während Druck und Volumen sich entsprechend ändern:

$$dQ_2 = T d\left(\frac{\nu r}{T}\right) + \mu c dT \ .$$

Die Gleichung findet sich abgeleitet in Clausius' mechanischer Wärmetheorie, Bd. I, Abschnitt VI, § 11. c ist die spezifische Wärme des flüssigen Wassers, r die äufsere latente Wärme des Dampfes, beide hier in Wärmemafs gemessen. Die ganze dem Gemenge zuzuführende Wärme ist demnach:

$$dQ = \lambda \left\{ c_v\, dT + ART \frac{dv}{v} \right\} + T d\left(\frac{\nu r}{T}\right) + \mu c dT \ .$$

Auch hier setzen wir $dQ = 0$, dividieren durch T und integrieren. Aus der Integralgleichung schaffen wir mit Hilfe der Zustandsgleichung und der Gleichung a) die Gröfsen v und ν fort und erhalten:

Digitized by Google

$$\text{II)} \qquad 0 = (\lambda c_p + \mu c)\log\frac{T}{T_0} + \lambda AR\log\frac{p_0 - e_0}{p - e} + \lambda\frac{R}{R_1}\left\{\frac{r}{T}\frac{e}{p-e} - \frac{r_0}{T_0}\frac{e_0}{p_0 - e_0}\right\} \quad .$$

Die gleich Null gesetzte Gröfse bedeutet auch hier den Unterschied der Entropie zwischen dem End- und dem Anfangszustande. Die erlangte Gleichung können wir benutzen, so lange bis die Temperatur den Gefrierpunkt erreicht, dann aber gelangen wir zum

3. Stadium, in welchem die Luft neben dem Dampfe und dem flüssigen Wasser auch Eis enthält. Jetzt wird bei weiterer Expansion die Temperatur nicht sogleich weiter sinken, denn die latente Wärme des gefrierenden Wassers wird auch ohne Temperaturerniedrigung die Arbeit liefern, welche die Überwindung des äufseren Druckes erfordert. Doch nicht allein hierzu wird die Gefrierungswärme verwandt werden müssen, sondern auch dazu, einen Teil des schon verdichteten Wassers wieder in Dampf aufzulösen. Da nämlich während der Expansion das Volumen wächst, ohne dafs die Temperatur sinkt, so wird am Ende des Prozesses wieder mehr Wasser dampfförmig sein, als vorher, das Gewicht des gebildeten Eises wird kleiner sein, als das der schon vorhanden gewesenen Flüssigkeit. Sei nun wieder ν der Teil von μ, welcher dampfförmig ist, σ sei der Teil, welcher als Eis besteht, q sei die Schmelzwärme eines Kilogrammes Eis. T, e, r sind Konstanten. Da also $dT = 0$ ist, so haben wir der Luft jetzt nur die Wärmemenge $\lambda ARTdv/v$ zuzuführen, dem Wasser, welches wir verdampfen, die Wärmemenge $rd\nu$ und dem Wasser, welches wir gefrieren lassen, die Menge $-qd\sigma$. Dem ganzen Gemenge also kommt die Wärmemenge zu:

$$dQ = \lambda ART\frac{dv}{v} + rd\nu - qd\sigma \quad .$$

Setzen wir $dQ = 0$, dividieren durch T und integrieren, so folgt:

$$0 = \lambda AR\log\frac{v}{v_0} + \frac{r}{T}(\nu - \nu_0) - \frac{q}{T}(\sigma - \sigma_0) \quad .$$

Die Division durch T war hier nur nötig, um der rechten

Digitized by Google

Seite die Bedeutung des Entropieunterschiedes zu geben. Mit Hilfe der Zustandsgleichung und der Gleichung a) können wir v und v fortschaffen, und statt ihrer den Druck p einführen. Die Gleichung zeigt uns alsdann, wie sich mit der Änderung des Druckes die Menge σ des gebildeten Eises ändert. Die Einzelheiten des Prozesses interessieren uns indes weniger, als die Grenzen, innerhalb deren er stattfindet. Wir beziehen daher den Index 0 auf den Zustand, in welchem das Gemisch eben die Temperatur 0° erreichte, in welchem also Eis nicht vorhanden, $\sigma_0 = 0$ war. Den Index 1 hingegen beziehen wir auf den Zustand, in welchem das letzte Wasser gefroren ist, in welchem also die Temperatur eben anfängt, unter 0° zu sinken. Hier ist offenbar $\sigma = \mu - v$, da ja nur noch Eis und Dampf vorhanden ist. Setzt man nun nach Einführung der Drucke diese Werte ein, so folgt:

$$0 = \lambda AR \log \frac{p_0 - e}{p_1 - e} + \lambda \frac{R}{R_1} \frac{e}{p_1 - e} \frac{r+q}{T} - \lambda \frac{R}{R_1} \frac{e}{p_0 - e} \frac{r}{T} - \mu \frac{q}{T} . \quad \text{III)}$$

Diese Gleichung verbindet also die Drucke p_0 und p_1, bei welchen das dritte Stadium erreicht und verlassen wird.

Den Gröfsen e und T war es nicht nötig, einen Index beizufügen, da sie die Gleichen für End- und Anfangszustand sind.

4. Stadium: Sinkt nun die Temperatur weiter, so haben wir nur Dampf und Eis. Die Betrachtungen, welche wir anzustellen haben, sind die gleichen, wie im 2. Stadium und auch die Endformel ist die gleiche. Nur hat hier die Verdampfungswärme einen anderen Wert wie dort. Sie ist nämlich hier gleich $r+q$, denn die Wärme, welche erforderlich ist, das Eis unmittelbar in Dampf zu verwandeln, mufs genau gleich der Wärme sein, welche nötig ist, das Eis erst zu schmelzen und das Wasser alsdann in Dampf zu verwandeln. Wenn wir streng sein wollen, dürfen wir dabei q nicht konstant annehmen, sondern müssen es als ein wenig veränderlich mit der Temperatur betrachten, doch sind die Unterschiede so klein, dafs sie hier aufser Betracht bleiben können. In diesem vierten Stadium wird man nun bis zu denjenigen Temperaturen gelangen, bei welchen die Luft selber nicht mehr als permanentes Gas betrachtet werden kann.

Digitized by Google

Die vier Stadien, welche wir unterschieden haben, könnte man sehr passend als das Trocken-, Regen-, Hagel- und Schneestadium bezeichnen.

Ist man nun in der Lage, die Veränderungen eines Gemenges, welches einen beträchtlichen Prozentsatz Wasser enthält, exakt verfolgen zu müssen, so wird nichts übrig bleiben, als dafs man sich an diese komplizierten Formeln hält. Man verfährt alsdann in folgender Weise: Man setzt zunächst die Werte von λ und μ in alle Gleichungen ein. Man setzt sodann die Gröfsen p_0 und T_0 für den gegebenen Anfangszustand in die Gleichung I) ein. Die entstehende Gleichung und die Gleichung b) fafst man auf als zwei Gleichungen mit den beiden Unbekannten p und T. Löst man sie nach diesen auf, so erhält man denjenigen Zustand, in welchem man vom ersten Stadium zum zweiten übergehen mufs. Die erhaltenen Werte setzt man alsdann als p_0 und T_0 in die Gleichung II) ein. Indem man in der erhaltenen Gleichung $T = 273$ setzt, erhält man dasjenige p_0, welches in den Gleichungen des dritten Stadiums vorkommt. Bestimmt man nun weiter aus Gleichung III) den Enddruck p_1 des dritten Stadiums, so bildet dieser Druck und die Temperatur 273 das p_0 und T_0 in den Gleichungen des vierten Stadiums. Häufig wird es vorkommen, dafs die Temperatur, bis zu welcher das erste Stadium gilt, unterhalb des Gefrierpunktes liegt; alsdann geht man unmittelbar zum vierten Stadium über, das zweite und dritte fallen fort. Nachdem man so für alle Gleichungen die Koefficienten und die Grenzen der Gültigkeit bestimmt hat, kann man sie benutzen, um für jedes beliebige p das zugehörige T und umgekehrt zu bestimmen. Freilich werden sich alle diese Rechnungen nur durch successive Annäherungen ausführen lassen, und man wird gut thun, die erforderlichen Näherungswerte der Tafel zu entnehmen. Hat man p und T für irgend einen Zustand ermittelt, so ergeben sich die übrigen Attribute desselben leicht. Die Dichte des Gemenges folgt aus der jedesmaligen Zustandsgleichung. Die Gleichung a) giebt die Menge des noch dampfförmigen und damit auch die Menge des schon verflüssigten Wassers. Häufig wird man die Höhendifferenz h wissen wollen, welche den verschiedenen Zuständen p_0 und p_1 entspricht, unter der Annahme, dafs die ganze Atmosphäre

Digitized by Google

sich im sogenannten adiabatischen Gleichgewichtszustande befindet. Will man die exakte Lösung der Aufgabe, so ist sie durch die mühsame mechanische Auswertung des Integrales

$$h = \int_{p_1}^{p_0} v dp$$

zu erlangen; da aber gerade in diesem Punkte eine exakte Bestimmung niemals besonderen Wert hat, so kann man sich hier stets an die bequeme Tafel halten.

B. Handelte es sich nur um ein Gemenge von einer ganz bestimmten Zusammensetzung, also nur um einen Wert des Verhältnisses $\mu : \lambda$, so könnte man die abgeleiteten Formeln exakt durch eine Tafel wiedergeben, welche die adiabatischen Änderungen des Gemisches von jedem Zustande aus unmittelbar übersehen liefse. Man würde Druck und Temperatur als Koordinaten in einer Ebene benutzen, und man würde diese Ebene bedecken mit einem Systeme von Kurven, welche alle Zustände verbänden, die adiabatisch ineinander übergehen können. Man würde alsdann nur nötig haben, von einem gegebenen Anfangszustande aus an der durch den betreffenden Punkt gehenden Kurve entlang zu gleiten, um durch alle Stadien hindurch das Verhalten des Gemisches zu übersehen. Da aber die Meteorologie notgedrungen sehr mannigfaltige Mischungsverhältnisse behandeln muſs, so würde sie auf diesem Wege einer grofsen Zahl von Tafeln bedürfen. Es zeigt sich nun, daſs man auch mit einer Tafel auskommen kann, wenn man sich einmal beschränkt auf solche Fälle, in welchen Gewicht und Druck des Wasserdampfes klein ist gegen Gewicht und Druck der Luft, und wenn man zweitens auch von den Resultaten keine gröfsere Genauigkeit verlangt, als sie der Vernachlässigung jener Gröfsen gegen diese entspricht. Wirft man nämlich μ fort gegen λ und e gegen p, so ist die Form der zu ziehenden Kurven die gleiche für alle verschiedenen absoluten Werte von μ, es können also dieselben Kurven für alle verschiedenen Gemische benutzt werden. Die Punkte allerdings, in welchen die verschiedenen Stadien ineinander übergehen, werden sehr verschieden liegen für verschiedene Gemische und es wird daher besonderer Vorkehrungen be-

Digitized by Google

dürfen, durch welche diese Punkte ermittelt werden. Nach diesen Prinzipien ist nun die Tafel konstruiert.

Im Grundnetze sind als Abscissen die Drucke im Intervall von 300 mm bis 800 mm Quecksilber, als Ordinaten die Temperaturen zwischen -20^0 und $+30^0$ C. eingetragen. Es stellt jedoch, wie man sieht, nicht ein gleiches Längenwachstum der Koordinaten einen gleichen Druck- oder Temperaturzuwachs dar, sondern die Tafel ist so konstruiert, dafs gleichem Zuwachse der Länge ein gleicher Zuwachs der Logarithmen des Druckes resp. der absoluten Temperatur entspricht. Der Vorteil dieser Anordnung besteht darin, dafs so die Kurven, auf welche es ankommt, zum Teil exakt, zum Teil angenähert gerade Linien werden, was einen bedeutenden Vorteil für die genaue Konstruktion und Benutzung der Tafel ergiebt.

Die Adiabaten des ersten Stadiums sind nun bei Vernachlässigung von μ gegen λ gegeben durch die Gleichung:

$$\text{constans} = c_p \log T - AR \log p \quad .$$

Die Logarithmen sind stets natürliche. Mit Clausius ist zu setzen

$$c_p = 0.2375 \, \frac{\text{Kalorie}}{\text{Grad Cels.} \times \text{Kilogr.}} \quad ,$$

$$A = \frac{1}{423.55} \, \frac{\text{Kalorie}}{\text{Kilogrammmeter}} \quad ,$$

$$R = 29.27 \, \frac{\text{Kilogrammmeter}}{\text{Grad Cels.} \times \text{Kilogr.}} \quad .$$

Diese Adiabaten erscheinen in unserer Zeichnung als gerade Linien. Eine von ihnen ist durch den Buchstaben (α) gekennzeichnet und mit diesem möge das System genannt werden. Die einzelnen Linien sind so gezogen, dafs von einer zur anderen der Wert der Konstanten, der Entropie, um

$$0.0025 \, \frac{\text{Kalorie}}{\text{Grad Cels.} \times \text{Kilogr.}}$$

wächst. Sie erscheinen dabei in gleichem Abstand von einander. Eine von ihnen ist durch den Punkt 0^0 C. und 760 mm Druck gezogen.

Digitized by Google

Die Kurven des zweiten Stadiums genügen jetzt[1]) der Gleichung:

$$\text{constans} = c_p \log T - AR \log p + \frac{R}{R_1} \frac{r}{T} \frac{e}{p} \quad .$$

R/R_1 ist die Dichtigkeit des Wasserdampfes in Bezug auf Luft, also gleich 0.6219. r ist nach CLAUSIUS gleich $607 - 0.708\ (T - 273)$ Kalorien/Kilogramm, e habe ich für die verschiedenen Temperaturen der von BROCH[2]) berechneten Tabelle entnommen. Die Kurven verlaufen mit schwacher Krümmung von rechts oben nach links unten. Eine von ihnen ist mit β bezeichnet. Auch sie sind so gezogen, dafs die Entropie von einer zur anderen per Kilogramm um 0.0025 Kalorien/Grad Cels. wächst und dafs eine unter ihnen durch den Punkt 0°, 760 mm geht.

Die Kurvenstücke, welche dem dritten Stadium entsprechen, fallen mit der Isotherme 0° zusammen.

Endlich sind die Kurven des vierten Stadiums ganz ähnlich denjenigen des zweiten, aber doch nicht ihnen gleich, denn ihre Formel geht aus der jener hervor, indem für r jetzt $r + q$ gesetzt wird, wo $q = 80$ Kalorien/Kilogramm ist. Sie sind mit γ bezeichnet und nach derselben Regel gezogen wie α und β, im allgemeinen bilden sie nicht die Verlängerung der Kurven β.

Es sind nun noch Mittel anzugeben, durch welche die Übergangspunkte der verschiedenen Stadien gefunden werden können. Um das Ende des ersten Stadiums zu ermitteln, dienen die punktierten Linien. Dieselben geben in Grammen, berechnet nach der Formel $v = Re/R_1 T$, die gröfste Menge

---

[1]) Wenn auch μ gegen λ zu vernachlässigen ist, so ist doch fraglich, ob noch $c\mu$ gegen $c_p\lambda$ zu vernachlässigen sei, da c viermal gröfser ist wie c_p. Wenn auch in den Grenzen der Tafel μ nicht gröfser ist gegen λ als $^1/_{40}$, so erreicht doch das Verhältnis $c\mu : c_p\lambda$ schon den Wert $^1/_{10}$. Für meteorologische Anwendungen bedenke man indes, dafs in diesen extremen Fällen doch nicht das flüssige Wasser vollständig mit der Luft fortgeführt werden wird. Häufig wird ein so grofser Bruchteil desselben als Regen herausfallen, dafs man der Wahrheit näher kommt, wenn man die spezifische Wärme des flüssigen Wassers ganz vernachlässigt, als wenn man für sie das volle Gewicht in Rechnung setzt.

[2]) Siehe Trav. du Bureau intern. des poids et mesures, Tome I.

Digitized by Google

Wassers, welche ein Kilogramm des Gemenges in den verschiedenen Zuständen eben noch als Dampf zu enthalten vermag. So verbindet also die mit 25 bezeichnete Kurve alle diejenigen Zustände, in welchen auf 1 Kilogramm des Gemenges im Sättigungszustande 25 Gramm Dampf kommen. Sie sind von Gramm zu Gramm gezogen. Enthält ein Gemenge in jedem Kilogramm n Gramm Dampf, so dürfen wir offenbar der Kurve des ersten Stadiums folgen bis zur punktierten Linie n, dann aber haben wir zum zweiten, resp. vierten Stadium überzugehen.

Die Grenze des zweiten Stadiums gegen das dritte ist gegeben durch den Schnittpunkt der betreffenden Adiabate β mit der Isotherme von 0^0. Durch den Druck p_0, welcher diesem Schnittpunkte entspricht, und die Menge μ des Wassers ist der Druck p_1 bestimmt, bei welchem der Übergang vom dritten zum vierten Stadium zu erfolgen hat. Zur graphischen Bestimmung von p_1 soll die kleine Hilfstafel dienen, welche sich am Fuſse der gröſseren findet. Dieselbe enthält als Abscissen die Drucke in derselben Anordnung wie die groſse Tafel, und als Ordinaten die Gesamtmenge μ des Wassers in allen Zuständen, berechnet in Grammen pro Kilogramm des Gemenges. Die schrägen Linien der Tafel sind nichts anderes als die Kurven, welche der Gleichung III) des dritten Stadiums entsprechen, wenn man in dieser Gleichung p_0 als Konstante, p_1 und μ aber als variable Koordinaten ansieht. Diese Linien sind nicht genau Gerade, obwohl sie im Maſsstabe der Zeichnung nicht von solchen zu unterscheiden sind. Der höchste Punkt jeder Linie entspricht dem Falle $p_1 = p_0$. Das zugehörige μ ist nicht Null, sondern gleich dem Minimalwerte ν, welchen μ haben muſs, damit überhaupt das Gemenge bei 0^0 gesättigt sei und die Hilfstafel zur Anwendung komme. Will man nun zu einem bestimmten Werte von p_0 und μ das zugehörige p_1 finden, so sucht man diejenige schräge Linie, deren höchster Punkt auf der Abscisse p_0 liegt, und geht auf derselben hinunter bis zur Ordinate μ. Der Druck, bei welchem man diese Ordinate erreicht, ist der gesuchte Druck p_1. Mit ihm ist der Übergangspunkt zum vierten Stadium gefunden.

Hat man nun auf diese Weise die Gesamtheit der Zustände ermittelt, welche das Gemisch durchläuft, so findet

Digitized by Google

man für jeden einzelnen die übrigen interessierenden Gröfsen in folgender Weise:

1. Die punktierte Linie, auf welcher man sich befindet, giebt unmittelbar an, wie viel Gramm Wasser für den betreffenden Zustand noch dampfförmig sind. Subtrahiert man diese Menge von der ganzen ursprünglichen Menge μ, so erhält man die Menge des bereits kondensierten Wassers.

2. Die Dichtigkeit δ des Gemenges kann bei den eingeführten Vernachlässigungen für alle Zustände berechnet werden nach der Formel: $\delta = p/RT$ oder $\log \delta = \log p - \log T - \log R$. Graphisch könnte sie ablesbar gemacht werden, wenn man die Tafel noch bedeckte mit einem Systeme von Linien gleicher Dichtigkeit. Man sieht ein, dafs diese Linien durch ein System paralleler Grade gebildet werden würden. In Wirklichkeit ist nun auf der Tafel nur eine dieser Linien, die Linie δ gezogen, um die Tafel nicht zu überlasten. Man kann aber auch schon mit Hilfe dieser einen Graden die Dichtigkeit zweier Zustände 1 und 2 vergleichen nach dieser Regel: Von den Punkten 1 und 2 ziehe man zwei Gerade parallel zu δ bis dahin, wo sie die Isotherme 0^0 schneiden, und lese die Drucke p_1 und p_2 an diesen Schnittpunkten ab. Wie $p_1 : p_2$, so verhalten sich die Dichtigkeiten in 1 und 2. Denn die Dichtigkeiten für die Zustände p_1, 0^0 und p_2, 0^0 verhalten sich nach dem MARIOTTE'schen Gesetze wie $p_1 : p_2$ und sie sind gleich mit den Dichtigkeiten in 1 und 2, da sie mit diesen auf Linien gleicher Dichtigkeit liegen.

3. Der Höhenunterschied h, welcher unter Annahme des adiabatischen Gleichgewichtszustandes dem Übergange von dem Zustande p_0 zu dem Zustande p entspricht, ist gegeben durch die Gleichung:

$$h = \int_p^{p_0} v dp = R \int_p^{p_0} T \frac{dp}{p} \quad .$$

Hierin würde man nun T als Funktion von p der Tafel entnehmen, und dann die Integration mechanisch ausführen. Thatsächlich wird die Voraussetzung adiabatischen Gleichgewichts stets so mangelhaft erfüllt sein, dafs es auf eine exakte Entwickelung ihrer Konsequenzen gar nicht ankommt.

Digitized by Google

Andererseits werden wir bei mäfsigen Höhen einen relativ sehr unbedeutenden Fehler begehen, wenn wir dem T einen mittleren Wert geben, und es alsdann als konstant betrachten. Es schwankt nämlich im Bereiche der Tafel nur zwischen 253 und 303, legen wir ihm also den konstanten Wert $T_0 = 273$ bei, so übersteigt der Fehler in h kaum je $\frac{1}{9}$ des ganzen Wertes. Geben wir uns mit diesem Fehler zufrieden, so haben wir $h = \text{constans} - RT_0 \log p$, und können nun unmittelbar neben den Drucken auch die Höhen als Abscissen einführen. Es wird sogar überall einem gleichen Längenzuwachse der Abscisse ein gleicher Zuwachs der Höhe entsprechen. Die Höhenskala ist auf der Tafel ganz am Fufse angebracht, ihr Nullpunkt ist auf den Druck 760 verlegt, weil dieser als Normaldruck am Meeresspiegel bezeichnet zu werden pflegt.

C. Um nun den Gebrauch der Tafel an einem Beispiele zu erläutern, stellen wir uns die folgende konkrete Aufgabe: Gegeben ist am Meeresspiegel eine Luftmasse von 750 mm Druck, 27° Temperatur und 50 pCt. relativer Feuchtigkeit; gefragt wird, welche Zustände die Masse durchlaufe, wenn sie ohne Wärmezufuhr in höhere Schichten der Atmosphäre und damit unter niederen Druck versetzt wird und in welchen Höhen über dem Meeresspiegel angenähert die verschiedenen Zustände erreicht werden.

Zunächst suchen wir auf der Tafel denjenigen Punkt, welcher dem Anfangsstadium entspricht. Wir finden ihn als Schnittpunkt der horizontalen Isotherme 27 und der vertikalen Isobare 750. Wir bemerken, dafs er fast genau auf der punktierten Linie 22 liegt. Dies bedeutet, dafs unsere Luftmasse in jedem Kilogramm ihres eigenen Gewichtes 22.0 Gramm Wasserdampf enthalten müfste, um gesättigt zu sein. Da sie aber nur 50 pCt. relative Feuchtigkeit hat, so enthält sie 11.0 Gramm Wasser im Kilogramm. Dies merken wir uns für später. Ferner fahren wir auf der Isobare 750 hinunter bis zur Höhenskala, die sich am untersten Rande der Tafel findet, und lesen hier 100 m ab. Der Nullpunkt der Höhenskala liegt also um 100 m unterhalb des von uns als Ausgang gewählten Meeresspiegels, und wir haben von allen direkten Ablesungen der Höhenskala stets 100 m zu subtrahieren, um Höhen über dem Meeresspiegel zu erhalten. Heben wir nun

Digitized by Google

unsere Luftmasse in die Höhe, so wird die Reihe der Zustände, welche sie durchläuft, zunächst gegeben durch diejenige Linie des Systemes α, welche durch den Anfangszustand geht.[1]) Eine ausgezogene Linie findet sich nicht vor, wir interpolieren deshalb eine solche. Wenn die Zahl der sich kreuzenden Linien verwirrend erscheint, so nehmen wir einen Papierstreifen und legen ihn parallel dem gerade betrachteten Systeme, es fällt dann alle Verwirrung fort. Um nun den Zustand etwa in der Nähe der Höhe 700 m kennen zu lernen, suchen wir den Punkt $700+100=800$ in der Höhenskala und gehen senkrecht in die Höhe, bis wir unsere Linie α treffen. Der Schnittpunkt giebt 687 mm Druck und 19.3° Temperatur. Wir dürfen aber die Linie α nur bis zu demjenigen Punkte benutzen, in welchem sie die punktierte Linie 11 schneidet. Denn dafs wir diese Linie erreichen, bedeutet, dafs wir zu einem Zustande gelangen, in welchem die Luft nur noch eben 11 Gramm Wasser im Kilogramm dampfförmig zu enthalten vermag. Da wir nun 11 Gramm im Kilogramm haben, so beginnt bei weiterer Abkühlung die Kondensation. Der Druck für den Punkt beginnenden Niederschlages ist 640 mm, die Temperatur 13.3°. Dies ist nicht etwa die Temperatur des ursprünglichen Thaupunktes, sondern sie ist niedriger. Die punktierte Linie 11 schneidet die Isobare 750 bei 15.8°, und dies ist der ursprüngliche Thaupunkt. Da aber aufser der Abkühlung unserer Luft auch eine Vergröfserung des Volumens derselben stattgefunden hat, so hat sich das Wasser noch bis 13.3° flüchtig erhalten können. Die Höhe, in der wir uns befinden, entspricht der unteren Grenze der Wolkenbildung, sie beträgt ungefähr 1270 m. Um die Zustände weiter zu verfolgen, legen wir durch den Schnittpunkt eine Kurve des Systemes β und folgen dieser. Dieselbe fällt viel langsamer gegen die Abscissenaxe ab, als die bisher benutzte Linie α, es ändert sich also die Temperatur jetzt viel langsamer mit der Höhe als bisher, was in dem Freiwerden der latenten Wärme des Wasser-

[1]) Die Buchstaben α, β, γ, welche die Systeme bezeichnen, wird man in kleinen Kreisen am Rande der Tafel finden. Zu jedem derselben führt eine Linie desjenigen Systemes, welches bezeichnet werden soll. Die Zustandsänderung unseres Beispieles ist in der Tafel durch eine gestrichelte Linie angegeben.

Digitized by Google

dampfes seinen Grund hat. Nachdem wir nun 1000 m seit dem Beginne der Kondensation gestiegen sind, ist die Temperatur nur bis 8.2°, also nur um 0.51° auf je 100 m, gesunken. Wir befinden uns auf der punktierten Linie 8.9 und ersehen daraus, dafs jetzt noch 8.9 Gramm Wasser flüchtig sind, dafs also in diesen ersten Tausend Metern der Wolkenschicht 2.1 Gramm Wasser pro Kilogramm Luft kondensiert sind. Die Temperatur 0° erreichen wir bei dem Drucke 472 mm und in der Höhe 3750 m, während wir sie schon in der Höhe 2600 m erreicht hätten, wenn die Luft trocken gewesen wäre und wir die Linie α nicht hätten verlassen müssen. 4.9 Gramm Wasser oder 0.45 pCt. des gesamten Inhaltes erweisen sich jetzt als kondensiert, und dieser Teil beginnt bei weiterer Ausdehnung zu gefrieren und Hagel zu bilden. Bis aber nicht das letzte Teilchen Wasser gefroren ist, kann die Temperatur nicht weiter sinken, und wir werden daher auf eine gewisse Strecke die Temperatur 0° gleichmäfsig beibehalten. Um zu erfahren, bis wie weit, dient uns die Hilfstafel zwischen der Höhenskala und der gröfseren Tafel. Wir fahren auf der Isobare 472 hinunter bis zur punktierten Linie dieser Tafel, wir legen durch den Treffpunkt eine Linie parallel den schrägen Linien der Hilfstafel und gehen auf dieser Linie bis zu derjenigen horizontalen Linie, welche durch die Zahl 11, das Gewicht des gesamten Wassers, charakterisiert ist, und welche wir leicht zwischen die gezeichneten Horizontalen 10 und 15 interpolieren. Sobald wir diese Linie erreicht haben, lesen wir den Druck $p = 463$ mm ab und kehren zur grofsen Tafel zurück. Bei dem gefundenen Drucke ist der Gefrierungsprozefs beendigt, die Höhenschicht, innerhalb deren er stattfand, hat eine Dicke von nahezu 150 m. Auffallen mufs es, dafs den punktierten Linien zufolge die Menge des dampfförmigen Wassers während des Gefrierungsprozesses wieder ein wenig zugenommen hat. Dies ist indes ganz richtig, es hat ja das Volumen zugenommen, ohne dafs die Temperatur gesunken wäre. Mit dem Drucke 463 mm verlassen wir die Temperatur 0°. Das Wasser, welches jetzt noch niedergeschlagen wird, geht unmittelbar in den festen Zustand über. Da bald nicht mehr viel Wasser dampfförmig ist, so beginnt die Temperatur wieder mit der Höhe schneller zu sinken. Wir erfahren die ver-

Digitized by Google

schiedenen Zustände, indem wir uns derjenigen der Linien γ anvertrauen, welche durch den Punkt 463 auf der Isotherme 0° gelegt werden kann. Die Temperatur −20°, bis zu welcher unsere Tafel benutzbar ist, wird erreicht in der Höhe 7200 m und bei dem Drucke 305 mm, nur noch 2 Gramm Wasser finden sich luftförmig im Kilogramm, die übrigen 9 sind kondensiert. Interessiert es uns, zu wissen, wie sich die Dichte in diesem Zustande zur Dichte im Anfangszustande verhält, so legen wir durch die entsprechenden Punkte zwei Parallelen zur Linie δ. Dieselben treffen die Isotherme 0° bei den Drucken 330 und 680. Wie diese Drucke, d. h. wie 33 : 68, so verhalten sich die Dichten zu einander und wie 33 und 68 zu 76, so verhalten sie sich zur Dichte der Luft im Normalzustande von 0° und 760 mm Druck.

Alle diese Angaben sind direkt aus der Tafel abgelesen. Fehler, die stören könnten, finden sich wohl nur in den Höhenangaben. Diese beziehen sich nämlich genau genommen auf das Aufsteigen in einer Atmosphäre von der überall gleichen Temperatur 0°. Meist aber wird anzunehmen sein, dafs die Temperatur der Atmosphäre überall die gleiche sei, wie die der aufsteigenden Luftmasse. Mit einem Minimum von Rechnung kann man die hieraus entspringenden Fehler bedeutend reduzieren. So fanden wir den Punkt beginnenden Niederschlages bei dem Drucke 640 mm. Diesem entspricht die Höhe 1270 m nur dann, wenn die Temperatur 0° ist. In unserem Falle aber lag sie zwischen 27° und 13°, also im Mittel bei 20°. Bei dieser Temperatur mufs die Höhe um $\frac{20}{273}$ oder $\frac{1}{14}$ gröfser sein, da die Dichtigkeit der Luft um den gleichen Bruchteil kleiner ist, als bei 0°, die Höhe beträgt also in Wirklichkeit zwischen 1350 und 1400 m.

Wir müssen das Beispiel noch durch die Erwähnung besonderer Fälle ergänzen:

1. Wir nahmen an, dafs während des Hagelstadiums noch die ganze ursprüngliche Wassermenge von 11 Gramm in der Luft enthalten gewesen sei. Dies wird nun allerdings nur bei sehr schnellem Aufsteigen zutreffend sein, in anderen Fällen wird vielleicht der gröfste Teil des kondensierten Wassers als Regen herausgefallen sein, und also nur ein Bruchteil desselben zum Gefrieren gelangen. Hat man eine Schätzung, wie grofs

Digitized by Google

dieser Bruchteil ist, so gestattet die Tafel immer noch die Entnahme der richtigen Verhältnisse. Hätte man in unserem Beispiele Grund zu der Annahme, die Hälfte des bis 0° kondensierten Wassers sei entfernt gewesen, so wären bei Erreichung der Isotherme 0° nur noch 8.5 Gramm Wasser im Kilogramm Luft vorhanden gewesen. Wir wären alsdann bei der Benutzung der Hilfstafel nicht bis zur Horizontalen 11, sondern nur bis zur Horizontalen 8.5 herabgegangen und hätten die Temperatur 0° schon bei 466 mm Druck verlassen, dies wäre der einzige Unterschied gewesen.

2. Hätten wir nicht 50 pCt., sondern nur 10 pCt. relativer Feuchtigkeit in unserem Beispiele angenommen, so hätten wir die Linie α benutzen können bis zur punktierten Linie 2.2. Dieser Schnittpunkt findet sich bei 455 mm und $-13.6°$, also bedeutend unter Null. Es wäre also zu einer Bildung flüssigen Wassers gar nicht gekommen, und also auch nicht zu dem Stadium der Hagelbildung, sondern nur zu einer Sublimation des Wassers aus dem dampfförmigen in den festen Zustand. Wir wären von dem Schnittpunkte mit der Linie 2.2 aus unmittelbar derjenigen Linie des Systemes γ gefolgt, welche sich durch diesen Schnittpunkt hätte legen lassen. Die Frage ist nicht uninteressant: welchen Thaupunkt durfte unser Gemenge in seinem Anfangszustande von Druck und Temperatur höchstens besitzen, wenn die Kondensation flüssigen Wassers, d. h. die Kondensation oberhalb 0°, eben vermieden sein sollte? Um sie zu beantworten, verfolgen wir die Linie α bis zur Isotherme 0° und finden hier die punktierte Linie 5.25. Wir hätten also höchstens 5.25 Gramm Wasser im Kilogramm Luft haben dürfen. Um nun zu erfahren, bei welcher Temperatur die Luft beim Druck 750 mm alsdann gesättigt gewesen wäre, gleiten wir auf der Linie 5.25 hinauf bis zur Isobare 750 mm und treffen dieselbe bei der Temperatur 4.8° und dies ist der gesuchte Maximalwert des Thaupunktes.

Digitized by Google

[Am Schlusse des Heftes der meteorologischen Zeitschrift, in welchem diese Abhandlung erschien, findet sich die folgende Nachschrift der Redaktion:]

Als die Drucklegung des Heftes schon begonnen hatte, erhielten wir einen Brief von Herrn Dr. HERTZ, aus dem wir uns erlauben, einen Teil zum Abdruck zu bringen, mit der Bemerkung indessen, dafs unserer Ansicht nach der einleitende Teil seiner Abhandlung für eine um so wertvollere Bereicherung unserer Zeitschrift anzusehen ist, als zwar die Resultate in befriedigender Übereinstimmung mit jenen von GULDBERG und MOHN stehen, der Weg aber, auf dem sie gewonnen sind, teilweise abweicht und sich vollständiger an die Arbeiten von CLAUSIUS etc. anschliefst. Zudem ist der Gegenstand für die Meteorologie so wichtig und jene Arbeiten von GULDBERG und MOHN, auf welche wir Herrn Dr. HERTZ aufmerksam gemacht haben, keineswegs so allgemein zugänglich, dafs nicht eine Darlegung des Gegenstandes in einer neuen Zeitschrift sehr am Platze wäre. Herr Dr. HERTZ schreibt uns:

„Meinen besten Dank für die freundliche Übersendung der Arbeit von GULDBERG und MOHN; wenn ich dieselbe früher gekannt hätte, hätte ich den ganzen Abschnitt A meiner Arbeit weggelassen, denn thatsächlich stimmt derselbe aufser in der Bezeichnung aufs Haar mit der GULDBERG-MOHN'schen Berechnung überein. Einen Schreck habe ich übrigens doch von der Sache gehabt. Denn indem ich das von GULDBERG und MOHN berechnete Beispiel auf meiner Tafel aufsuchte, ging alles hinreichend gut bis 0°, indem ich aber weiter fuhr, fand ich, dafs das Gemisch die Temperatur $-20°$ nach meiner Tafel bei 320 mm Druck erreicht, und GULDBERG und MOHN geben nach ihren Formeln 292·73 mm an.

Ein Fehler von 28 mm ging doch zu weit, und ich fürchtete stark, dafs ich in der Konstruktion einen Fehler gemacht hätte. Es scheint jedoch, dafs GULDBERG und MOHN sich verrechnet haben (im numerischen Beispiele), denn indem ich mit deren eigenen Formeln und Konstanten die Rechnung mehrfach wiederhole, finde ich stets 313 mm für den betreffenden Druck. Eine Abweichung von 7 mm in maximo ist also vorhanden zwischen den exakten Formeln und den Ablesungen der Tafel, und eine solche Ungenauigkeit ist mit den notwendigerweise zu machenden Vernachlässigungen auch verbunden. Ich denke, sie wird für die Meteorologie unter 100 Fällen 90mal irrelevant sein und durch die unvergleichliche Bequemlichkeit aufgewogen werden. Thatsächlich schätze ich für die genaue Durchrech-

Digitized by Google

nung des Beispieles von GULDBERG und MOHN eine Arbeit von mindestens drei bis vier Stunden, während es in wenigen Minuten auf der Tafel verfolgt werden kann. Auch sind jene 7 mm eigentlich nicht gröfser, als die Unsicherheit der ganzen Rechnung überhaupt, welche dadurch entsteht, dafs nur ein Teil des ausgefällten Wassers mit der Luft fortgeführt wird.

Ist es noch Zeit, einen Zusatz oder Nachschrift von 10 bis 15 Zeilen zu machen, in welchen ich die Priorität GULDBERG's und MOHN's anerkenne und zugleich auf den Grund jener Diskrepanz hinweise? Ich fürchte, es möchten andere die Tafel mit jenem Beispiele vergleichen, dieselbe für ungenau bis auf 28 mm halten und sie deshalb verwerfen. Doch auf die Priorität haben Sie ja selber hingewiesen ...

Kiel, den 8. Dezember 1884. Dr. H. HERTZ."

Digitized by Google

20. Über die Beziehungen zwischen Licht und Elektricität.

Vortrag, gehalten bei der 62. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte zu Heidelberg am 20. September 1889.
(Verlag von Emil Strauss in Bonn.)

Hochansehnliche Versammlung!

Wenn von Beziehungen zwischen Licht und Elektricität die Rede ist, denkt der Laie zunächst an das elektrische Licht. Mit diesem Gegenstande hat indessen unser heutiger Vortrag nichts zu thun. Dem Physiker fallen dabei eine Reihe zarter Wechselwirkungen zwischen beiden Kräften ein, etwa die Drehung der Polarisationsebene durch den Strom, oder die Änderung von Leitungswiderständen durch das Licht. In diesen treffen indes Licht und Elektricität nicht unmittelbar zusammen, zwischen beide grofsen Kräfte tritt als Vermittler ein Drittes, die ponderabele Materie. Auch mit dieser Gruppe von Erscheinungen wollen wir uns nicht befassen. Es giebt andere Beziehungen zwischen beiden Kräften, inniger, enger als die bisher erwähnten. Die Behauptung, welche ich vor Ihnen vertreten möchte, sagt geradezu aus: Das Licht ist eine elektrische Erscheinung, das Licht an sich, alles Licht, das Licht der Sonne, das Licht einer Kerze, das Licht eines Glühwurmes. Nehmt aus der Welt die Elektricität, und das Licht verschwindet; nehmt aus der Welt den lichttragenden Äther, und die elektrischen und magnetischen Kräfte können nicht mehr den Raum überschreiten. Dies ist unsere Behauptung. Sie ist nicht von heute und gestern, sie hat schon eine längere Geschichte hinter sich. Ihre Geschichte giebt ihre Begründung. Eigene Versuche von mir, welche sich auf diesen Gegenstand beziehen, bilden nur ein Glied in einer

Digitized by Google

längeren Kette. Und von der Kette, nicht allein von dem einzelnen Gliede möchte ich Ihnen erzählen. Nicht leicht ist es freilich, von diesen Dingen zugleich verständlich und völlig zutreffend zu reden. Die Vorgänge, von welchen wir handeln, haben ihren Tummelplatz im leeren Raume, im freien Äther. Diese Vorgänge sind an sich unfaſsbar für die Hand, unhörbar für das Ohr, unsichtbar für das Auge; der inneren Anschauung, der begrifflichen Verknüpfung sind sie zugänglich, aber nur schwer der sinnlichen Beschreibung. So viel wie möglich wollen wir daher versuchen, an die Anschauungen und Vorstellungen anzuknüpfen, welche wir schon besitzen. Rufen wir uns also zurück, was wir vom Lichte und der Elektricität Sicheres wissen, ehe wir versuchen, beide miteinander in Verbindung zu setzen.

Was ist denn das Licht? Seit den Zeiten Young's und Fresnel's wissen wir, daſs es eine Wellenbewegung ist. Wir kennen die Geschwindigkeit der Wellen, wir kennen ihre Länge, wir wissen, daſs es Transversalwellen sind; wir kennen mit einem Worte die geometrischen Verhältnisse der Bewegung vollkommen. An diesen Dingen ist ein Zweifel nicht mehr möglich, eine Widerlegung dieser Anschauungen ist für den Physiker undenkbar. Die Wellentheorie des Lichtes ist, menschlich gesprochen, Gewiſsheit; was aus derselben mit Notwendigkeit folgt, ist ebenfalls Gewiſsheit. Es ist also auch gewiſs, daſs aller Raum, von dem wir Kunde haben, nicht leer ist, sondern erfüllt mit einem Stoffe, welcher fähig ist, Wellen zu schlagen, dem Äther. Aber so bestimmt auch unsere Kenntnisse von den geometrischen Verhältnissen der Vorgänge in diesem Stoffe sind, so unklar sind noch unsere Vorstellungen von der physikalischen Natur dieser Vorgänge, so widerspruchsvoll zum Teil unsere Annahmen über die Eigenschaften des Stoffes selbst. Naiv und unbefangen hatte man von vornherein die Wellen des Lichtes, sie mit denen des Schalles vergleichend, als elastische Wellen angesehen und behandelt. Nun sind aber elastische Wellen in Flüssigkeiten nur in der Form von Longitudinalwellen bekannt. Elastische Transversalwellen in Flüssigkeiten sind nicht bekannt, sie sind nicht einmal möglich, sie widersprechen der Natur des flüssigen Zustandes. Also war man zu der Behauptung gezwungen, der raum-

Digitized by Google

erfüllende Äther verhalte sich wie ein fester Körper. Betrachtete man dann aber den ungestörten Lauf der Gestirne und suchte sich Rechenschaft von der Möglichkeit desselben zu geben, so war wiederum die Behauptung nicht zu umgehen, der Äther verhalte sich wie eine vollkommene Flüssigkeit. Neben einander bildeten beide Behauptungen einen für den Verstand schmerzhaften Widerspruch, welcher die schön entwickelte Optik entstellte. Suchen wir denselben nicht zu bemänteln; wenden wir uns vielmehr der Elektricität zu, vielleicht dafs ihre Erforschung uns zur Hebung auch dieser Schwierigkeit verhilft.

Was ist denn die Elektricität? Das ist allerdings eine grofse Frage. Sie erregt Interesse weit über die Grenzen der engeren Wissenschaft hinaus. Die meisten, welche sie stellen, zweifeln dabei nicht an der Existenz der Elektricität an sich, sie erwarten eine Beschreibung, eine Aufzählung der Eigenschaften und Kräfte dieses wunderbaren Stoffes. Für den Fachmann hat die Frage zunächst die andere Form: Giebt es denn überhaupt Elektricitäten? Lassen sich die elektrischen Erscheinungen nicht wie alle anderen Erscheinungen allein auf die Eigenschaften des Äthers und der ponderabeln Materie zurückführen? Wir sind weit davon entfernt, darüber entschieden zu haben, diese Frage bejahen zu können. In unserer Vorstellung spielt sicherlich die stofflich gedachte Elektricität eine grofse Rolle. Und in der Redeweise vollends herrschen heutzutage noch unumschränkt die althergebrachten, Allen geläufigen, uns gewissermafsen liebgewordenen Vorstellungen von den beiden sich anziehenden und abstofsenden Elektricitäten, welche mit ihren Fernwirkungen wie mit geistigen Eigenschaften begabt sind. Die Zeit, in welcher man diese Vorstellungen ausbildete, war die Zeit, in welcher das Newton'sche Gravitationsgesetz seine schönsten Triumphe am Himmel feierte, die Vorstellung von unvermittelten Fernwirkungen war den Geistern geläufig. Die elektrischen und magnetischen Anziehungen folgten dem gleichen Gesetze wie die Wirkung der Gravitation; was Wunders, wenn man glaubte, durch Annahme einer ähnlichen Fernwirkung die Erscheinungen in einfachster Weise erklärt, dieselben auf den letzten erkennbaren Grund zurückgeführt zu haben. Freilich wurde das anders,

Digitized by Google

als im gegenwärtigen Jahrhundert die Wechselwirkungen zwischen elektrischen Strömen und Magneten hinzukamen, welche unendlich viel mannigfaltiger sind, in welchen die Bewegung, die Zeit, eine so grofse Rolle spielt. Man wurde gezwungen, die Zahl der Fernwirkungen zu vermehren, an ihrer Form herumzubessern. Dabei ging die Einfachheit, die physikalische Wahrscheinlichkeit mehr und mehr verloren. Durch das Aufsuchen umfassender einfacher Formen, sogenannter Elementargesetze, suchte man diese wiederzuerlangen. Das berühmte Weber'sche Gesetz ist der wichtigste Versuch dieser Art. Man mag über die Richtigkeit desselben denken wie man will, die Gesamtheit dieser Bestrebungen bildete ein in sich geschlossenes System voll wissenschaftlichen Reizes; wer einmal in den Zauberkreis desselben hineingeraten war, blieb in demselben gefangen. War der eingeschlagene Weg gleichwohl eine falsche Fährte, so konnte Warnung nur kommen von einem Geiste von grofser Frische, der wie von neuem unbefangen den Erscheinungen entgegentrat, der wieder ausging von dem, was er sah, nicht von dem, was er gehört, gelernt, gelesen hatte. Ein solcher Geist war Faraday. Faraday hörte zwar sagen, dafs bei der Elektrisierung eines Körpers man etwas in ihn hineinbringe, aber er sah, dafs die eintretenden Änderungen nur aufserhalb sich bemerkbar machten, durchaus nicht im Inneren. Faraday wurde gelehrt, dafs die Kräfte den Raum einfach überspringen, aber er sah, dafs es von gröfstem Einflusse auf die Kräfte war, mit welchem Stoffe der angeblich übersprungene Raum erfüllt war. Faraday las, dafs es Elektricitäten sicher gäbe, dafs man aber über ihre Kräfte sich streite, und doch sah er, wie diese Kräfte ihre Wirkungen greifbar entfalteten, während er von den Elektricitäten selbst nichts wahrzunehmen vermochte. So kehrte sich in seiner Vorstellung die Sache um. Die elektrischen und magnetischen Kräfte selber wurden ihm das Vorhandene, das Wirkliche, das Greifbare; die Elektricität, der Magnetismus wurden ihm Dinge, über deren Vorhandensein man streiten kann. Die Kraftlinien, wie er die selbständig gedachten Kräfte nannte, standen vor seinem geistigen Auge im Raume als Zustände desselben, als Spannungen, als Wirbel, als Strömungen, als was auch immer — das vermochte er selbst nicht anzugeben,

Digitized by Google

— aber da standen sie, beeinflufsten einander, schoben und drängten die Körper hin und her, und breiteten sich aus, von Punkt zu Punkt einander die Erregung mitteilend. Auf den Einwand, wie denn im leeren Raume andere Zustände als vollkommene Ruhe möglich seien, konnte er antworten: Ist denn der Raum leer? Zwingt uns nicht schon das Licht, ihn als erfüllt zu denken? Könnte nicht der Äther, welcher die Wellen des Lichtes leitet, auch fähig sein, Änderungen aufzunehmen, welche wir als elektrische und magnetische Kräfte bezeichnen? Wäre nicht sogar ein Zusammenhang zwischen diesen Änderungen und jenen Wellen denkbar? Könnten nicht die Wellen des Lichtes etwas wie Erzitterung solcher Kraftlinien sein?

Soweit etwa kam FARADAY in seinen Anschauungen, seinen Vermutungen. Beweisen konnte er dieselben nicht. Eifrig suchte er nach Beweisen. Untersuchungen über den Zusammenhang von Licht, Magnetismus, Elektricität waren Lieblingsgegenstände seiner Arbeit. Der schöne Zusammenhang, welchen er fand, war nicht derjenige, welchen er suchte. Auch suchte er weiter, und nur sein höchstes Alter machte diesen Bestrebungen ein Ende. Unter den vielen Fragen, welche er sich beständig aufwarf, kehrte immer wieder die Frage, ob die elektrischen und magnetischen Kräfte Zeit zu ihrer Ausbreitung nötig hätten. Wenn wir einen Magneten plötzlich durch den Strom erregen, wird seine Wirkung sofort bis zu den gröfsten Entfernungen verspürt? Oder trifft sie zunächst die benachbarten Nadeln, dann die folgenden, endlich die ganz entfernten? Wenn wir einen Körper in schneller Abwechselung umelektrisieren, schwankt dann die Kraft in allen Entfernungen gleichzeitig? Oder treffen die Schwankungen um so später ein, je mehr wir uns von dem Körper entfernen? In letzterem Falle würde sich die Wirkung der Schwankung als eine Welle in den Raum ausbreiten. Giebt es solche Wellen? FARADAY erhielt keine Antwort mehr auf diese Fragen. Und doch ist ihre Beantwortung aufs engste mit seinen Grundvorstellungen verknüpft. Wenn es Wellen elektrischer Kraft giebt, die unbekümmert um ihren Ursprung im Raume forteilen, so beweisen sie uns aufs deutlichste den selbständigen Bestand der Kräfte, welche sie bilden. Dafs

Digitized by Google

diese Kräfte den Raum nicht überspringen, sondern von Punkt zu Punkt fortschreiten, können wir nicht besser beweisen, als indem wir ihren Fortschritt von Augenblick zu Augenblick thatsächlich verfolgen. Auch sind die aufgeworfenen Fragen der Beantwortung nicht unzugänglich, es lassen sich wirklich diese Dinge durch sehr einfache Versuche angreifen. Wäre es FARADAY vergönnt gewesen, den Weg zu diesen Versuchen aufzuspüren, so hätten seine Anschauungen sogleich die Herrschaft davongetragen. Der Zusammenhang von Licht und Elektricität wäre dann von Anfang an so hell hervorgetreten, dafs er selbst weniger scharfsichtigen Augen als den seinen nicht hätte entgehen können.

Indessen ein so leichter und schneller Weg war der Wissenschaft nicht beschieden. Die Versuche gaben einstweilen keine Auskunft, und auch der Theorie lag ein Eingehen in FARADAY's Gedankenkreis zunächst fern. Die Behauptung, dafs elektrische Kräfte unabhängig von ihren Elektricitäten bestehen könnten, widersprach geradewegs den herrschenden elektrischen Theorien. Ebenso wies die herrschende Optik entschieden den Gedanken ab, es könnten die Wellen des Lichtes auch wohl anderer als elastischer Natur sein. Der Versuch, die eine oder die andere dieser Behauptungen eingehender zu behandeln, mufste fast als müfsige Spekulation erscheinen. Wie sehr müssen wir also den glücklichen Geist eines Mannes bewundern, welcher zwei Vermutungen, die jede für sich so ferne lagen, so mit einander zu verknüpfen wufste, dafs sie sich gegenseitig stützten, und dafs das Ergebnis eine Theorie war, welcher man die innere Wahrscheinlichkeit von vornherein nicht absprechen konnte. Der Mann, von welchem ich rede, war der Engländer MAXWELL. Man kennt seine im Jahre 1865 veröffentlichte Arbeit unter dem Namen der elektromagnetischen Lichttheorie. Man kann diese wunderbare Theorie nicht studieren, ohne bisweilen die Empfindung zu haben, als wohne den mathematischen Formeln selbständiges Leben und eigener Verstand inne, als seien dieselben klüger als wir, klüger sogar als ihr Erfinder, als gäben sie uns mehr heraus, als seinerzeit in sie hineingelegt wurde. Es ist dies auch nicht geradezu unmöglich; es kann eintreten, wenn nämlich die Formeln richtig sind über das Mafs dessen hinaus, was

Digitized by Google

der Erfinder sicher wissen konnte. Freilich lassen sich solche umfassenden und richtigen Formeln nicht finden, ohne dafs mit dem schärfsten Blicke jede leise Andeutung der Wahrheit aufgefafst wird, welche die Natur durchscheinen läfst. Es liegt für den Kundigen auf der Hand, welcher Andeutung hauptsächlich MAXWELL folgte. War dieselbe doch auch anderen Forschern aufgefallen und hatte diese, RIEMANN und LORENZ, zu verwandten, wenn auch nicht ebenso glücklichen Spekulationen angeregt. Es war der folgende Umstand. Bewegte Elektricität übt magnetische Kräfte, bewegter Magnetismus elektrische Kräfte aus, welche Wirkungen indessen nur bei sehr grofsen Geschwindigkeiten merklich werden. In die Wechselbeziehungen zwischen Elektricität und Magnetismus treten also Geschwindigkeiten ein, und die Konstante, welche diese Beziehungen beherrscht und in denselben beständig wiederkehrt, ist selber eine Geschwindigkeit von ungeheurer Gröfse. Sie war auf verschiedenen Wegen, zuerst durch KOHLRAUSCH und WEBER, aus rein elektrischen Versuchen bestimmt worden und hatte sich, soweit es überhaupt die schwierigen Versuche erkennen liefsen, gleich gezeigt einer anderen wichtigen Geschwindigkeit, der Geschwindigkeit des Lichtes. Es mochte das Zufall sein, aber einem Jünger FARADAY's konnte es so nicht erscheinen. Ihm mufste es eine Folge davon sein, dafs derselbe Äther die elektrischen Kräfte und das Licht übermittelt. Die beiden fast gleich gefundenen Geschwindigkeiten mufsten in Wahrheit genau gleich sein. Dann aber fand sich die wichtigste optische Konstante in den elektrischen Formeln bereits vor. Dies war das Band, welches MAXWELL zu verstärken suchte. Er erweiterte die elektrischen Formeln in der Weise, dafs sie alle bekannten Erscheinungen, aber neben denselben auch eine unbekannte Klasse von Erscheinungen enthielten, elektrische Wellen. Diese Wellen wurden dann Transversalwellen, deren Wellenlänge jeden Wert haben konnte, welche sich aber im Äther stets mit gleicher Geschwindigkeit, der Lichtgeschwindigkeit, fortpflanzten. Und nun konnte MAXWELL darauf hinweisen, dafs es Wellen von eben solchen geometrischen Eigenschaften in der Natur ja wirklich gäbe, wenn wir auch nicht gewohnt sind, sie als elektrische Erscheinungen zu betrachten, sondern sie mit einem be-

Digitized by Google

sonderen Namen, als Licht, bezeichnen. Leugnete man freilich MAXWELL's elektrische Theorie, so fiel jeder Grund fort, seinen Ansichten in betreff des Lichtes beizutreten. Oder hielt man fest daran, dafs das Licht eine Erscheinung elastischer Natur sei, so verlor seine elektrische Theorie den Boden unter sich. Trat man aber unbekümmert um bestehende Anschauungen an das Gebäude heran, so sah man einen Teil den anderen stützen wie die Steine eines Gewölbes, und das Ganze schien über einen tiefen Abgrund des Unbekannten hinweg das Bekannte zu verbinden. Die Schwierigkeit der Theorie erlaubte freilich nicht sogleich, dafs die Zahl ihrer Jünger sehr grofs wurde. Wer aber einmal sie durchdacht hatte, wurde ihr Anhänger und suchte eifrig fortan, ihre ersten Voraussetzungen, ihre letzten Folgerungen zu prüfen. Die Prüfung durch den Versuch mufste sich freilich lange Zeit auf einzelne Behauptungen, auf das Aufsenwerk der Theorie beschränken. Ich verglich soeben die MAXWELL'sche Theorie mit einem Gewölbe, welches eine Kluft unbekannter Dinge überspannt. Darf ich in diesem Bilde noch fortfahren, so würde ich sagen, dafs alles, was man lange Zeit zur Kräftigung dieses Gewölbes zu thun vermochte, darin bestand, dafs man die beiden Widerlager verstärkte. Das Gewölbe ward dadurch in den Stand gesetzt, sich selber dauernd zu tragen, aber es hatte doch eine zu grofse Spannweite, als dafs man es hätte wagen dürfen, auf ihm als sicherer Grundlage nun weiter in die Höhe zu bauen. Hierzu waren besondere Hauptpfeiler notwendig, welche, vom festen Boden aus aufgemauert, die Mitte des Gewölbes fafsten. Einem solchen Pfeiler wäre der Nachweis zu vergleichen gewesen, dafs wir aus dem Lichte unmittelbar elektrische oder magnetische Wirkungen erhalten können. Dieser Pfeiler hätte unmittelbar dem optischen, mittelbar dem elektrischen Teile des Gebäudes Sicherheit verliehen. Ein anderer Pfeiler wäre der Nachweis gewesen, dafs es Wellen elektrischer oder magnetischer Kraft giebt, welche sich nach Art der Lichtwellen ausbreiten können. Dieser Pfeiler hätte umgekehrt unmittelbar den elektrischen, mittelbar den optischen Teil gestützt. Eine harmonische Vollendung des Gebäudes wird den Aufbau beider Pfeiler erfordern, für das erste Bedürfnis aber genügt einer von ihnen. Der erstgenannte hat noch nicht

Digitized by Google

in Angriff genommen werden können; für den letztgenannten aber ist es nach langem Suchen endlich geglückt, einen sicheren Stützpunkt zu finden; das Fundament ist in genügender Breite gelegt; ein Teil des Pfeilers steht schon aufgemauert da, und unter der Arbeit vieler hilfreichen Hände wird er bald die Decke des Gewölbes erreichen und demselben die Last des nun weiter zu errichtenden Gebäudes abnehmen. An dieser Stelle war ich so glücklich, an der Arbeit Anteil nehmen zu können. Diesem Umstande verdanke ich die Ehre, dafs ich heute zu Ihnen reden darf; er wird mich also auch entschuldigen, wenn ich nunmehr Ihre Aufmerksamkeit ganz auf diesen einen Teil des Gebäudes hinzulenken versuche. Freilich zwingt mich alsdann die Kürze dieser Stunde, entgegen der Gerechtigkeit, die Arbeiten vieler Forscher kurzweg zu überspringen; ich kann Ihnen nicht zeigen, in wie mannigfaltiger Weise meine Versuche vorbereitet waren, wie nahe einzelne Forscher der Ausführung derselben bereits gekommen sind.

War es denn wirklich so schwer, nachzuweisen, dafs elektrische und magnetische Kräfte Zeit zu ihrer Ausbreitung brauchen? Konnte man nicht eine Leydener Flasche entladen und direkt beobachten, ob die Zuckung eines entfernten Elektroskopes etwas später erfolgte? Genügte es nicht, in gleicher Absicht auf eine Magnetnadel zu achten, während man in einiger Entfernung plötzlich einen Elektromagneten erregte? In der That hat man diese oder ähnliche Versuche früher auch wohl angestellt, ohne indessen einen Zeitunterschied zwischen Ursache und Wirkung wahrzunehmen. Einem Anhänger der MAXWELL'schen Theorie mufs das freilich als das notwendige Ergebnis erscheinen, bedingt durch die ungeheure Geschwindigkeit der Ausbreitung. Die Ladung einer Leydener Flasche, die Kraft eines Magneten können wir schliefslich nur auf mäfsige Entfernungen wahrnehmen, sagen wir auf zehn Meter. Einen solchen Raum durchfliegt das Licht, also nach der Theorie auch die elektrische Kraft in dem dreifsigmillionten Teil der Sekunde. Ein derartiges Zeitteilchen können wir unmittelbar nicht messen, nicht wahrnehmen. Aber schlimmer als das, es stehen uns nicht einmal Zeichen zu Gebote, welche fähig wären, eine solche Zeit mit hinreichender Schärfe zu begrenzen. Wenn wir eine Länge

Digitized by Google

bis auf den zehnten Teil des Millimeters genau messen wollen, dürfen wir ihren Anfang nicht durch einen breiten Kreidestrich bezeichnen. Wenn wir eine Zeit auf den tausendsten Teil der Sekunde genau bestimmen wollen, so ist es widersinnig, ihren Beginn durch den Schlag einer grofsen Glocke anzeigen zu wollen. Die Entladungszeit einer Leydener Flasche ist nun allerdings für unsere gewöhnlichen Begriffe verschwindend kurz. Aber das ist sie sicherlich schon, wenn sie etwa den dreifsigtausendsten Teil der Sekunde füllt. Und doch wäre sie alsdann für unseren gegenwärtigen Zweck noch mehr als tausendmal zu lang. Doch legt uns hier die Natur ein feineres Mittel nahe. Wir wissen seit lange, dafs der Entladungsschlag einer Leydener Flasche kein gleichförmig ablaufender Vorgang ist, dafs er sich, ähnlich dem Schlage einer Glocke, zusammensetzt aus einer grofsen Zahl von Schwingungen, von hin- und hergehenden Entladungen, welche sich in genau gleichen Perioden folgen. Die Elektricität ist imstande, elastische Erscheinungen nachzuahmen. Die Dauer jeder einzelnen Schwingung ist viel kleiner, als die der Gesamtentladung, man kann auf den Gedanken kommen, die einzelne Schwingung als Zeichen zu benützen. Aber leider füllten die kürzesten beobachteten Schwingungen immer noch das volle Milliontel der Sekunde. Während eine solche Schwingung verlief, breitete sich ihre Wirkung schon über dreihundert Meter aus, in dem bescheidenen Raume eines Zimmers mufste sie als gleichzeitig mit der Schwingung empfunden werden. So konnte aus Bekanntem Hilfe nicht gewonnen werden, eine neue Erkenntnis mufste hinzukommen. Was hinzukam, war die Erfahrung, dafs nicht allein die Entladung der Flaschen, dafs vielmehr unter besonderen geeigneten Umständen die Entladung jedes beliebigen Leiters zu Schwingungen Anlafs giebt. Diese Schwingungen können viel kürzer sein, als die der Flaschen. Wenn Sie den Konduktor einer Elektrisiermaschine entladen, erregen Sie Schwingungen, deren Dauer zwischen dem hundertmillionten und dem tausendmillionten Teil der Sekunde liegt. Freilich folgen sich diese Schwingungen nicht in lang anhaltender Reihe, es sind wenige, schnell verlöschende Zuckungen. Es wäre besser für unsere Versuche, wenn dies anders wäre. Aber die Möglichkeit des Erfolges ist uns schon gewährt,

Digitized by Google

wenn wir auch nur zwei oder drei solcher scharfen Zeichen erhalten. Auch im Gebiete der Akustik können wir mit klappernden Hölzern eine dürftige Musik erzeugen, wenn uns die gedehnten Töne der Pfeifen und Saiten versagt sind.

Wir haben jetzt Zeichen, für welche der dreifsigmillionte Teil der Sekunde nicht mehr kurz ist. Aber dieselben würden uns noch wenig nützen, wenn wir nicht imstande wären, ihre Wirkung bis in die beabsichtigte Entfernung von etwa zehn Metern auch wirklich wahrzunehmen. Es giebt hierfür ein sehr einfaches Mittel. Dorthin, wo wir die Kraft wahrnehmen wollen, bringen wir einen Leiter, etwa einen geraden Draht, welcher durch eine feine Funkenstrecke unterbrochen ist. Die rasch wechselnde Kraft setzt die Elektricität des Leiters in Bewegung und läfst einen Funken in demselben auftreten. Auch dies Mittel mufste durch die Erfahrung selbst an die Hand gegeben werden, die Überlegung konnte es nicht wohl voraussehen. Denn die Funken sind mikroskopisch kurz, kaum ein hundertstel Millimeter lang; ihre Dauer beträgt noch nicht den millionten Teil der Sekunde. Es erscheint unmöglich, fast widersinnig, dafs sie sollten sichtbar sein, aber im völlig dunkeln Zimmer für das geschonte Auge sind sie sichtbar. An diesem dünnen Faden hängt das Gelingen unseres Unternehmens. Zunächst drängt sich uns eine Fülle von Fragen entgegen. Unter welchen Umständen werden unsere Schwingungen am stärksten? Sorgfältig müssen wir diese Umstände aufsuchen und ausnützen. Welche Form geben wir am besten dem empfangenden Leiter? Wir können gerade, wir können kreisförmige Drähte, wir können Leiter anderer Form wählen, die Erscheinungen werden immer etwas anders ausfallen. Haben wir die Form festgesetzt, welche Gröfse wählen wir? Schnell zeigt sich, dafs dieselbe nicht gleichgültig ist, dafs wir nicht jede Schwingung mit demselben Leiter untersuchen können, dafs Beziehungen zwischen beiden bestehen, welche an die Resonanzerscheinungen der Akustik erinnern. Und schliefslich, in wie viel verschiedenen Lagen können wir nicht einen und denselben Leiter in die Schwingungen halten! Bald sehen wir dann die Funken stärker ausfallen, bald schwächer werden, bald ganz verschwinden. Ich darf es nicht wagen, Sie von diesen Einzelheiten unterhalten zu wollen, im grofsen

Digitized by Google

Zusammenhange sind es Nebensachen. Aber es sind nicht Nebensachen für den Arbeiter auf diesem Gebiete. Es sind die Eigentümlichkeiten seines Werkzeuges. Wie sehr der Arbeiter sein Werkzeug kennt, davon hängt ab, was er mit demselben ausrichtet. Das Studium des Werkzeuges, das Eingehen in die erwähnten Fragen bildete denn auch den Hauptteil der zu bewältigenden Arbeit. Nachdem dieser Teil erledigt war, bot sich der Angriff auf die Hauptfrage von selber dar. Geben Sie einem Physiker eine Anzahl Stimmgabeln, eine Anzahl Resonatoren, und fordern Sie ihn auf, Ihnen die zeitliche Ausbreitung des Schalles nachzuweisen, er wird selbst in dem beschränkten Raume eines Zimmers keine Schwierigkeiten finden. Er stellt eine Stimmgabel beliebig im Zimmer auf, er horcht mit dem Resonator an den verschiedenen Stellen des Raumes herum und achtet auf die Schallstärke. Er zeigt, wie dieselbe an einzelnen Punkten sehr klein wird; er zeigt, wie dies daher rührt, dafs hier jede Schwingung aufgehoben wird durch eine andere später abgegangene, welche auf einem kürzeren Wege zum gleichen Ziele gelangt ist. Wenn ein kürzerer Weg weniger Zeit erfordert, als ein längerer, so ist die Ausbreitung eine zeitliche. Die gestellte Aufgabe ist gelöst. Aber unser Akustiker zeigt uns nun weiter, wie die stillen Stellen periodisch in gleichen Abständen sich folgen; er mifst daraus die Wellenlänge, und wenn er die Schwingungsdauer der Gabel kennt, erhält er daraus auch die Geschwindigkeit des Schalles. Nicht anders, sondern genau so verfahren wir mit unseren elektrischen Schwingungen. An die Stelle der Stimmgabel setzen wir den schwingenden Leiter. Anstatt des Resonators ergreifen wir unseren unterbrochenen Draht, den wir aber auch als elektrischen Resonator bezeichnen. Wir bemerken, wie derselbe in einzelnen Stellen des Raumes Funken enthält, in anderen funkenfrei ist; wir sehen, wie sich die toten Stellen nach festen Gesetzmäfsigkeiten periodisch folgen — die zeitliche Ausbreitung ist erwiesen, die Wellenlänge mefsbar geworden. Man wirft die Frage auf, ob die gefundenen Wellen Longitudinal- oder Transversalwellen seien. Wir halten unseren Draht in zwei verschiedenen Lagen in dieselbe Stelle der Welle; das einemal spricht er an, das anderemal nicht. Mehr bedarf es nicht; die Frage ist entschieden, es

Digitized by Google

sind Transversalwellen. Man fragt nach ihrer Geschwindigkeit. Wir multiplizieren die gemessene Wellenlänge mit der berechneten Schwingungsdauer und finden eine Geschwindigkeit, welche der des Lichtes verwandt ist. Bezweifelt man die Zuverlässigkeit der Berechnung, so bleibt uns noch ein anderer Weg. Die Geschwindigkeit elektrischer Wellen in Drähten ist ebenfalls ungeheuer grofs, mit dieser können wir die Geschwindigkeit unserer Wellen in der Luft unmittelbar vergleichen. Aber die Geschwindigkeit elektrischer Wellen in Drähten ist seit langer Zeit direkt gemessen. Es war dies eher möglich, weil sich diese Wellen auf viele Kilometer hin verfolgen lassen. So erhalten wir indirekt eine rein experimentelle Messung auch unserer Geschwindigkeit, und wenn das Resultat auch nur roh ausfällt, so widerspricht es doch nicht dem bereits erhaltenen.

Alle diese Versuche sind im Grunde sehr einfach, aber sie führen doch die wichtigsten Folgerungen mit sich. Sie sind vernichtend für jede Theorie, welche die elektrischen Kräfte als zeitlos den Raum überspringend ansieht. Sie bedeuten einen glänzenden Sieg der Theorie Maxwell's. Nicht mehr verbindet dieselbe unvermittelt weit entlegene Erscheinungen der Natur. Wem ihre Anschauung über das Wesen des Lichtes vorher nur die mindeste Wahrscheinlichkeit zu haben schien, dem ist es jetzt schwer, sich dieser Anschauung zu erwehren. Insoweit sind wir am Ziele. Aber vielleicht läfst sich hier die Vermittelung der Theorie sogar entbehren. Unsere Versuche bewegten sich schon hart an der Höhe des Passes, welcher nach der Theorie das Gebiet des Lichtes mit dem der Elektricität verbindet. Es liegt nahe, einige Schritte weiter zu gehen und den Abstieg in das Gebiet der bekannten Optik zu versuchen. Es wird nicht überflüssig sein, die Theorie auszuschalten. Es giebt viele Freunde der Natur, welche sich für das Wesen des Lichtes interessieren, welche dem Verständnisse einfacher Versuche nicht unzugänglich sind, und welchen gleichwohl die Theorie Maxwell's ein Buch mit sieben Siegeln ist. Aber auch die Ökonomie der Wissenschaft fordert, dafs Umwege vermieden werden, wo ein gerader Weg möglich ist. Können wir mit Hilfe elektrischer Wellen unmittelbar die Erscheinungen des

Digitized by Google

Lichtes herstellen, so bedürfen wir keiner Theorie als Vermittlerin; die Verwandtschaft tritt aus den Versuchen selbst hervor. Solche Versuche sind in der That möglich. Wir bringen den Leiter, welcher die Schwingungen erregt, in der Brennlinie eines sehr grofsen Hohlspiegels an. Es werden dadurch die Wellen zusammengehalten, und treten als kräftig dahineilender Strahl aus dem Hohlspiegel aus. Freilich können wir diesen Strahl nicht unmittelbar sehen, noch fühlen; seine Wirkung äufsert sich dadurch, dafs er Funken in den Leitern erregt, auf welche er trifft. Er wird für unser Auge erst sichtbar, wenn sich dasselbe mit einem unserer Resonatoren bewaffnet. Im Übrigen ist er ein wahrer Lichtstrahl. Wir können ihn durch Drehung des Spiegels in verschiedene Richtungen senden, wir können durch Aufsuchung des Weges, welchen er nimmt, seine geradlinige Ausbreitung erweisen. Bringen wir leitende Körper in seinen Weg, so lassen dieselben den Strahl nicht hindurch, sie werfen Schatten. Dabei vernichten sie den Strahl aber nicht, sie werfen ihn zurück; wir können den reflektierten Strahl verfolgen und uns überzeugen, dafs die Gesetze der Reflexion die der Reflexion des Lichtes sind. Auch brechen können wir den Strahl, in gleicher Weise wie das Licht. Um einen Lichtstrahl zu brechen, leiten wir ihn durch ein Prisma, er wird dadurch von seinem geraden Wege abgelenkt. Ebenso verfahren wir hier und mit dem gleichen Erfolge. Nur müssen wir hier entsprechend den Dimensionen der Wellen und des Strahles ein sehr grofses Prisma nehmen; wir stellen dasselbe also aus einem billigen Stoffe her, etwa Pech oder Asphalt. Endlich aber können wir sogar diejenigen Erscheinungen an unserem Strahle verfolgen, welche man bisher einzig und allein am Lichte beobachtet hat, die Polarisationserscheinungen. Durch Einschiebung eines Drahtgitters von geeigneter Struktur in den Weg des Strahles, lassen wir die Funken in unserem Resonator aufleuchten oder verlöschen, genau nach den gleichen geometrischen Gesetzmäfsigkeiten, nach welchen wir das Gesichtsfeld eines Polarisationsapparates durch Einschieben einer Krystallplatte verdunkeln oder erhellen.

Soweit die Versuche. Bei Anstellung derselben stehen wir schon ganz und voll im Gebiete der Lehre vom Lichte.

Digitized by Google

Indem wir die Versuche planen, indem wir sie beschreiben, denken wir schon nicht mehr elektrisch, wir denken optisch. Wir sehen nicht mehr in den Leitern Ströme fließen, Elektricitäten sich ansammeln; wir sehen nur noch die Wellen in der Luft, wie sie sich kreuzen, wie sie zerfallen, sich vereinigen, sich stärken und schwächen. Von dem Gebiete rein elektrischer Erscheinungen ausgehend, sind wir Schritt vor Schritt zu rein optischen Erscheinungen gelangt. Die Paßhöhe ist überschritten; der Weg senkt, ebnet sich wieder. Die Verbindung zwischen Licht und Elektricität, welche die Theorie ahnte, vermutete, voraussah, ist hergestellt, den Sinnen faßlich, dem natürlichen Geiste verständlich. Von dem höchsten Punkte, den wir erreicht haben, von der Paßhöhe selbst, eröffnet sich uns ein weiter Einblick in beide Gebiete. Sie erscheinen uns größer, als wir sie bisher gekannt. Die Herrschaft der Optik beschränkt sich nicht mehr auf Ätherwellen, welche kleine Bruchteile des Millimeters messen, sie gewinnt Wellen, deren Länge nach Decimetern, Metern, Kilometern rechnen. Und trotz dieser Vergrößerung erscheint sie uns von hier gesehen nur als ein kleines Anhängsel am Gebiete der Elektricität. Dieses letztere gewinnt am meisten. Wir erblicken Elektricität an tausend Orten, wo wir bisher von ihrem Vorhandensein keine sichere Kunde hatten. In jeder Flamme, in jedem leuchtenden Atome sehen wir einen elektrischen Prozeß. Auch wenn ein Körper nicht leuchtet, so lange er nur noch Wärme strahlt, ist er der Sitz elektrischer Erregungen. So verbreitet sich das Gebiet der Elektricität über die ganze Natur. Es rückt auch uns selbst näher, wir erfahren, daß wir in Wahrheit ein elektrisches Organ haben, das Auge. Dies ist der Ausblick nach unten, zum Besonderen. Nicht minder lohnend erscheint von unserem Standpunkte der Ausblick nach oben, zu den hohen Gipfeln, den allgemeinen Zielen. Da liegt nahe vor uns die Frage nach den unvermittelten Fernwirkungen überhaupt. Giebt es solche? Von vielen, welche wir zu besitzen glaubten, bleibt uns nur eine, die Gravitation. Täuscht uns auch diese? Das Gesetz, nach welchem sie wirkt, macht sie schon verdächtig. In anderer Richtung liegt nicht ferne die Frage nach dem Wesen der Elektricität. Von hier gesehen verbirgt sie sich hinter der bestimmteren Frage nach

Digitized by Google

dem Wesen der elektrischen und magnetischen Kräfte im Raume. Und unmittelbar an diese anschliefsend erhebt sich die gewaltige Hauptfrage nach dem Wesen, nach den Eigenschaften des raumerfüllenden Mittels, des Äthers, nach seiner Struktur, seiner Ruhe oder Bewegung, seiner Unendlichkeit oder Begrenztheit. Immer mehr gewinnt es den Anschein, als überrage diese Frage alle übrigen, als müsse die Kenntnis des Äthers uns nicht allein das Wesen der ehemaligen Imponderabilien offenbaren, sondern auch das Wesen der alten Materie selbst und ihrer innersten Eigenschaften, der Schwere und der Trägheit. Die Quintessenz uralter physikalischer Lehrgebäude ist uns in den Worten aufbewahrt, dafs alles, was ist, aus dem Wasser, aus dem Feuer geschaffen sei. Der heutigen Physik liegt die Frage nicht mehr ferne, ob nicht etwa alles, was ist, aus dem Äther geschaffen sei? Diese Dinge sind die äufsersten Ziele unserer Wissenschaft, der Physik. Es sind, um in unserem Bilde zu verharren, die letzten, vereisten Gipfel ihres Hochgebirges. Wird es uns vergönnt sein, jemals auf einen dieser Gipfel den Fufs zu setzen? Wird dies spät geschehen? Kann es bald sein? Wir wissen es nicht. Aber wir haben einen Stützpunkt für weitere Unternehmungen gewonnen, welcher eine Stufe höher liegt als die bisher benützten; der Weg schneidet hier nicht ab an einer glatten Felswand, sondern wenigstens der nächste absehbare Teil des Anstieges erscheint noch von mäfsiger Neigung, und zwischen den Steinen finden wir Pfade, die nach oben führen; der eifrigen und geübten Forscher sind viele; — wie könnten wir da anders als hoffnungsvoll den Erfolgen zukünftiger Unternehmungen entgegensehen?

Digitized by Google

21. Über den Durchgang der Kathodenstrahlen durch dünne Metallschichten.

Aus Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie. Bd. 45, S. 28—32, 1892.

Die Kathodenstrahlen unterscheiden sich vom Lichte wesentlich in Hinsicht der Fähigkeit, feste Körper zu durchdringen. Selbst solche Stoffe, welche für das Licht aller Gattungen die durchlässigsten sind, setzen schon in den dünnsten herstellbaren Schichten dem Durchgang der Kathodenstrahlen einen unüberwindlichen Widerstand entgegen. Um so auffallender erschien es mir, dafs gerade die für das Licht so undurchlässigen Metalle für die Kathodenstrahlen eine wenn auch geringe Durchlässigkeit besitzen. Dickere Metallschichten sind freilich wie für das Licht, so auch für die Kathodenstrahlen undurchdringlich; Metallschichten aber von solcher Dünne, dafs schon ein Teil des auffallenden Lichtes hindurchgeht, lassen auch einen Teil der auffallenden Kathodenstrahlen hindurchdringen, ja, wie es scheint, einen etwas gröfseren Bruchteil der Kathodenstrahlen als des Lichtes. Man kann sich davon durch die einfachsten Versuche überzeugen. Eine phosphorescenzfähige ebene Glasplatte, am besten ein Stück Uranglas belegt man auf einer Seite, welche wir die vordere nennen wollen, teilweise mit echtem Blattgold, befestigt auf dem Golde noch einige Glimmersplitter, und setzt nun diese vordere Seite den Kathodenstrahlen aus, welche etwa von einer ebenen kreisrunden Aluminiumkathode von 1 cm Durchmesser ausgehen, sagen wir in einem Abstande von 20 cm von der Kathode. Solange die Luftverdünnung noch nicht weit vorgeschritten ist und die Kathodenstrahlen als dichter blauer Lichtkegel das ganze Entladungsrohr füllen, phosphoresciert das Glas nur

Digitized by Google

aufserhalb der goldbelegten Stelle. Die Phosphorescenz wird in diesem Stadium hauptsächlich durch das Licht der Entladung bewirkt, von welchem das Goldblatt nur einen sehr kleinen Teil hindurchläfst. Wird nun aber bei fortschreitender Verdünnung das Innere des Entladungsrohres mehr und mehr lichtlos und beginnen die eigentlichen Kathodenstrahlen das belegte Glas zu treffen, so beginnt dieses auch hinter der Goldschicht zu phosphorescieren; dies Leuchten nimmt zu, und wenn die Kathodenstrahlen ihre lebhafteste Entwickelung erreicht haben, erscheint von der hinteren Seite aus betrachtet das Goldblatt nur noch als ein matter Schleier auf der Glasplatte, hauptsächlich erkennbar an seinen Rändern und an den kleinen Fältelungen, welche es enthält. Man kann kaum sagen, dafs es einen Schatten wirft. Die dünnen Glimmerplättchen dagegen, welche wir auf die Goldschicht gelegt haben, werfen durch diese hindurch ihre tiefschwarzen Schatten auf das Glas. Die Kathodenstrahlen durchsetzen also die Goldschicht, wie es scheint, mit geringem Verluste. Den gleichen Versuch mit gleichem Erfolge führte ich mit echtem Blattsilber aus, mit Blattaluminium, mit verschiedenen Sorten unechten Blattsilbers und Blattgoldes (Zinn-, Zink- und Kupferlegierungen), ferner mit chemisch niedergeschlagenen Silberschichten, sowie mit Schichten von Silber, Platin und Kupfer, welche im Vakuum durch die Entladung niedergeschlagen waren. Diese letzteren Schichten waren übrigens viel dünner als die geschlagenen Metallblätter. Charakteristische Unterschiede zwischen den verschiedenen Metallen habe ich nicht bemerkt. Am geeignetsten für die Versuche erschien mir das geschlagene Aluminium, wie es im Handel zu haben ist, es ist schon fast völlig undurchlässig für das Licht, sehr durchlässig für die Kathodenstrahlen, leicht zu handhaben, und wird von den Kathodenstrahlen nicht angegriffen, während z. B. eine Schicht von Blattsilber von denselben schnell in eigentümlicher Weise zerfressen wird.

Der Annahme, es seien in diesem Versuche die Kathodenstrahlen durch den Stoff des Metalles hindurchgegangen, kann man den Einwand entgegenstellen, es seien so dünne Metallschichten voll feiner Öffnungen und die Kathodenstrahlen möchten wohl durch diese und nicht durch das Metall hindurch

Digitized by Google

zum Glase gelangt sein. Bei den geschlagenen Metallen, an welchen die Erscheinung am meisten überrascht, ist das Vorhandensein vieler Poren nicht zu leugnen, aber die Gesamtoberfläche der Öffnungen beträgt doch kaum einige Prozent der Oberfläche des Metalles und dies reicht nicht aus, das helle Leuchten des belegten Glases zu erklären. Es erscheint ferner der belegte Teil des Glases völlig lichtlos, wenn wir das Glas von der vorderen Seite, der Seite der Kathode her betrachten. Die Kathodenstrahlen müssen also zu dem Glase auf einem Wege gelangt sein, welchen das von ihnen erregte Licht nicht rückwärts zurücklegen kann, sie können also nicht durch die Öffnungen des dem Glase eng anliegenden Metallblattes eingetreten sein. Legen wir weiter zwei Metallblätter übereinander, so wird die Zahl der sich überdeckenden Öffnungen verschwindend klein sein, die Kathodenstrahlen aber bringen das Glas auch noch unter einer doppelten Schicht der Blattmetalle zum kräftigen Leuchten, ja noch unter einer drei- und vierfachen Schicht von Blattgold oder Blattaluminium vermögen wir das Phosphorescieren des Glases und die Schatten davor befindlicher Gegenstände wahrzunehmen. Es ist mir übrigens aufgefallen, dafs eine doppelte Schicht das Leuchten weit mehr schwächt, als man es nach der geringen Schwächung erwarten sollte, welche die einfache Schicht hervorbringt. Ich glaube, dafs die folgende Überlegung eine genügende Erklärung dieser Erscheinung abgiebt. Die Metallbelegung bildet eine spiegelnde Fläche, in welcher das Phosphorescenzlicht reflektiert wird. Indem die spiegelnde Fläche dies Licht hindert, nach der Seite der Kathode auszustrahlen, verdoppelt sie die Intensität desselben für die der Kathode abgewandte Seite. Nehmen wir nun an, die Metallschicht lasse nur $\frac{1}{3}$ der Kathodenstrahlen hindurch, so vermindert sich gleichwohl das Leuchten nicht auf $\frac{1}{3}$, sondern nur auf $\frac{2}{3}$ des früheren Wertes, die zweite Schicht aber wird das Leuchten schon auf $\frac{2}{9}$ herabsetzen und weitere Schichten werden die Phosphorescenz schnell verschwinden machen. Ist diese Auffassung richtig, so dürfen Metallflächen, welche mehr als die Hälfte der Kathodenstrahlen hindurchlassen, das Leuchten überhaupt nicht schwächen, sondern es mufs das Glas hinter solchen Metallschichten sogar stärker phosphorescieren, als an den unbelegten

Digitized by Google

Stellen. An chemisch niedergeschlagenen Silberschichten von passender Dicke glaube ich diese Vermutung bestätigt gefunden zu haben; doch ist die Beobachtung insofern etwas unsicher, als man an den unbelegten Stellen durch das phosphorescierende Glas hindurch unvermeidlich das graublaue Leuchten des Gases wahrnimmt und man nicht mit völliger Sicherheit die Helligkeit dieses Lichtes von der des grünen Phosphorescenzlichtes trennen kann.

Gingen endlich die Kathodenstrahlen durch die Öffnungen des Metalles hindurch, so müfsten sie nach dem Durchgange ihren geradlinigen Weg fortsetzen. Dies aber thuen sie nicht, vielmehr werden die Strahlen bei dem Durchgange diffus zerstreut, etwa in der Weise, in welcher das Licht bei seinem Durchgange durch ein trübes Medium, z. B. Milchglas, zerstreut wird. Wir sperren den ganzen Querschnitt des cylindrischen Entladungsrohres in etwa 20 cm Entfernung von der Kathode durch eine Metallplatte ab, bringen in dieser eine kreisrunde Öffnung von einigen Millimetern Durchmesser an und verschliefsen dieselbe wieder durch ein Stück Blattaluminium. Halten wir nun eine phosphorescenzfähige Glasplatte unmittelbar hinter die Öffnung, so erhalten wir, wie zu erwarten war, ein deutliches und helles Bild der Öffnung auf dem Glase; entfernen wir die Glasplatte aber nur auf einen oder zwei Millimeter, so erscheint das Bild schon merklich vergröfsert und seine Helligkeit entsprechend vermindert, zugleich erscheint sein Rand verwaschen. Bei einer Entfernung der Glasplatte auf mehrere Millimeter erscheint das Bild der Öffnung schon äufserst verwaschen, vergröfsert und lichtschwach, und entfernen wir die Platte weiter, so erscheint das Entladungsrohr hinter dem Diaphragma einfach dunkel. Dafs dies nur an der Schwäche der von der kleinen Öffnung aus zerstreuten Kathodenstrahlen liegt, zeigt sich, wenn wir in dem Metalldiaphragma viele solcher durch Blattaluminium verschlossener Öffnungen anbringen. Am einfachsten bilden wir für diesen Versuch das Diaphragma aus einem Drahtgitter, welches wir eben gehämmert und auf welchem wir ein Stück Blattaluminium ausgespannt haben. Hinter derartigen Diaphragmen leuchtet das gesamte Entladungsrohr in gleichmäfsig verbreitetem, mäfsig hellem Lichte. Die Phosphorescenz ist

Digitized by Google

hinreichend stark, um zu gestatten, daſs wir aus den diffusen Kathodenstrahlen durch weitere Diaphragmen Strahlenbündel ausscheiden können und an diesen uns überzeugen, daſs auch nach dem Durchgange durch das Metallblatt die Kathodenstrahlen die Fähigkeit der geradlinigen Ausbreitung, der Ablenkung durch den Magneten u. s. w. nicht verloren haben.

Die Erscheinung, daſs die Kathodenstrahlen beim Durchgange durch blanke dünne Metallschichten zerstreut werden, dürfte im Zusammenhange stehen mit der anderen Erscheinung, daſs der von der Vorderfläche solcher Schichten reflektierte Teil der Kathodenstrahlen diffus zurückgeworfen wird, wie Herr E. Goldstein[1]) nachgewiesen hat.

---

[1]) Siehe Wiedemann's Ann. Bd. 15, S. 246, 1882.

Digitized by Google

22. Zum 31. August 1891.

Aus der Beilage zur Münchener Allgemeinen Zeitung vom 31. August 1891.

Das Geschlecht der Männer, welche jetzt an der Schwelle des Alters stehen, hat in Deutschland eine selten glückliche und erfolgreiche Zeit erst heraufgeführt und dann durchlebt. Nicht blofs auf politischem Gebiete sah es erreichte Ziele, verwirklichte Wünsche, auch in den meisten Künsten des Friedens war es Zeuge eines gewaltigen Aufschwunges und sah unser Volk in die Reihe der ersten Völker eintreten, nicht mehr allein nach der Selbstschätzung, sondern auch nach dem Zugeständnisse der anderen. Die Naturwissenschaften wurden gewifs auch im Anfange des Jahrhunderts in Deutschland eifrig betrieben, die Verdienste eines Humboldt, der unsterbliche Name eines Gauss liefsen die Achtung vor der deutschen Forschung nicht erlöschen; aber neben dem Weizen der echten Bemühung sprofste das Unkraut einer falschen Philosophie allzu üppig und allzu bevorzugt, als dafs jener zu voller Höhe hätte gedeihen können. Der nüchtern auf dem Wege des Versuches vorschreitenden Forschung fehlte bis gegen die Mitte des Jahrhunderts Reichtum und Glanz des internationalen Erfolges; die Begeisterung, welche die Scheinerfolge der Naturphilosophie begleitete, wurde vom Auslande mit Recht nicht geteilt. Mit Fleifs und Gewissenhaftigkeit folgte hart auf den Fersen das Inland dem Auslande, aber das Neue, der wirkliche Fortschritt, der grofse Erfolg wurde von Paris und London erwartet; dorthin reiste der junge Naturforscher, um Gelehrte von Weltruf zu sehen, um die Arbeit im grofsen Stile kennen und ausüben zu lernen, von dort bezog er die Hilfsmittel seiner Arbeit, dort mufste eine neue Entdeckung veröffentlicht und verbrieft werden, wenn sie als eingeführt gelten wollte —

Digitized by Google

es erschien fast unwahrscheinlich, dafs sie anderswo könne gemacht worden sein. Längst ist das anders geworden: selbständig und ebenbürtig steht auch in der experimentellen Forschung die deutsche Wissenschaft neben derjenigen der fortgeschrittensten Nachbarvölker, bald in diesem, bald in jenem Zweige ihnen voraneilend oder hinter ihnen zurückbleibend, im Durchschnitte die gleiche Linie haltend. Den Dank schuldet das Land der emsigen Arbeit gar vieler Mitwirkenden, aber er verdichtet sich naturgemäfs auf die kleine Zahl von Männern, an deren Namen sich die wirklichen Erfolge knüpfen. Manche derselben haben uns schon für immer verlassen, andere sind wir so glücklich, hoffentlich noch für lange Zeit, zu besitzen.

Der gröfste unter ihnen allen, der berufene Vertreter dieses Geschlechtes des Aufschwunges und des selbsterworbenen Ruhmes, der erste Naturforscher Deutschlands, Hermann v. Helmholtz, feiert heute seinen siebzigsten Geburtstag, nachdem er fast ein halbes Jahrhundert die Wissenschaft durch die Zahl, die Tiefe und die Wichtigkeit seiner Werke in freudiges Erstaunen gesetzt hat. Den zahllosen Kränzen der Bewunderung und des Dankes, welche ihm heute zu Füfsen gelegt werden, fügen wir in aller Bescheidenheit auch den unserigen hinzu. Als Deutsche freuen wir uns und sind stolz darauf, dafs wir seinen Namen besitzen, den wir wagen dürfen den geweihtesten Namen aller Zeiten und Völker an die Seite zu stellen, in der zuversichtlichen Hoffnung, dafs uns auch die Jahrhunderte nicht Lügen strafen werden. Als Menschen überhaupt hegen wir das gleiche Gefühl der Bewunderung, aber auch das gleiche Gefühl des Dankes. Das Ausland wird uns darin Recht geben, welches an diesem Tage auch mit seinen Kränzen nicht kargen wird, so wenig es bisher damit gekargt hat. So engherzig sich auch die Beziehungen der Völker zu einander gestaltet haben, im Reiche der Wissenschaft ist das Gefühl für die gemeinsamen Interessen aller Menschen noch nicht ganz verloren; ein Helmholtz wird auch heutzutage noch als eine Zierde und ein Stolz des ganzen Geschlechtes angesehen.

Wir wollen versuchen, uns die Thaten in die Erinnerung zurückzurufen, um derentwillen wir ihn feiern. Wir stehen

Digitized by Google

dabei von vornherein der Unmöglichkeit gegenüber, unsere Bewunderung denen voll und ganz mitzuteilen, welche nicht imstande sind, seine Werke auch selber zu genieſsen. Es ist ein Irrtum, zu glauben, die Bedeutung eines Werkes der Forschung sei erschöpft durch die Angabe, welche Aufgabe es löse. Das ist so wenig richtig, wie die Bedeutung eines Gemäldes durch die Angabe des Gegenstandes erschöpft ist, welchen es darstellt. Um den Wert des Gemäldes zu empfinden, muſs man es selber sehen und kunstsinnig sein. Auch die Werke der Forschung haben eine Art von Schönheit, die nicht nur verstanden, sondern auch genossen werden kann; um sie zu genieſsen, muſs man sich aber selber in das Werk versenken und eben auch kunstverständig sein. Eine kleinere theoretische Arbeit von Helmholtz behandelt z. B. die Bildung der Flüssigkeitsstrahlen. Die Frage schon scheint dem Laien fernliegend, die Lösung glückt nur unter Voraussetzungen, welche der Wirklichkeit wenig entsprechen, der Einfluſs der Arbeit auf Wissenschaft und Leben kann kaum anders als gering genannt werden. Und doch erfüllt um der Art und Weise der Lösung willen das Studium auch einer Abhandlung, wie dieser, den Geist mit demselben erhebenden Staunen, welches ein echtes Kunstwerk mit sich führt. Man muſs sich wohl denken, daſs die Stärke des Gefühles in dem Verständnisse für die Gröſse der überwundenen Schwierigkeit beruht. Wir sehen einen Geist, der das gewöhnliche Maſs weit überschreitet, scheinbar mühelos, in Wahrheit mit äuſserster Anstrengung eine Kluft überspringen, die unüberschreitbar schien. Erst nach dem Sprunge wird uns die Weite der Kluft völlig klar. Unser freudiger Beifall bricht von selber aus. Aber eine gleich spontane Teilnahme kann nicht erwartet werden von Zuschauern, von deren Standpunkt aus die Kluft nicht sichtbar ist, denen wir erst mit Worten versichern müssen, daſs überhaupt eine Schwierigkeit vorhanden war.

Nicht minder als die Tiefe der Werke Helmholtz' steht ihre Vielseitigkeit einer kurzen und doch würdigen Schilderung entgegen. Sein wissenschaftliches Leben mutet uns an wie eine ganze Odyssee durch die Reiche der exakten Forschung. Er begann als Arzt: das innere Bedürfnis, die Gesetze des Lebens zu kennen, dem er zu Hilfe kommen wollte, führte

Digitized by Google

ihn zum wissenschaftlichsten Teile der Medizin, zur Physiologie. Er fand sich gehemmt durch den lückenhaften Zustand unserer Kenntnis auch der leblosen Natur: so machte er sich auf, zunächst diese zu ergänzen, und wandte sich mehr und mehr der Physik zu; er wurde Mathematiker, um der Physik zu Hilfe zu kommen, und Philosoph, um sich die Berechtigung der mathematischen Erkenntnis und der Erkenntnis überhaupt klar zu machen. Schlagen wir die Fachschriften irgend eines dieser Wissensgebiete auf, so tritt uns sein Name entgegen, in ihnen allen hat er tiefe Spuren hinterlassen. Nur im Fluge können wir ihm folgen, wir halten uns nicht an die chronologische Ordnung und heben im Grunde nur seine drei gröfsten Ruhmestitel hervor.

Nicht der höchste unter diesen, aber der schönste, ich möchte sagen der lieblichste, ist gleich diejenige Erfindung, mit welcher er die praktische Medizin bereichert hat. Ich denke an den Augenspiegel. Niemand vor ihm vermochte das Innere des lebenden Auges zu untersuchen; dunkel und schweigend blickte das kranke dem Arzte entgegen, zur Beurteilung des Leidens, zur Bestimmung der Brechungsfehler gab es keine Hilfe, als die unklaren und unzuverlässigen Gefühle des Patienten. Die unentbehrliche Vorbedingung jeder Heilung, die richtige Erkenntnis des Übels, wurde in der Mehrzahl der Fälle erst möglich durch das unscheinbare Instrument; fast sprungweise hob sich nach seiner Erfindung die Augenheilkunde auf ihre gegenwärtige Höhe. Wer kann sagen, wie viele Tausende gegenwärtig ihr erhaltenes Augenlicht unserem Forscher verdanken, ihm persönlich, ohne es zu wissen, in dem guten Glauben, einzig dem behandelnden Arzte ihren Dank zu schulden! Die Erfindung des Augenspiegels ist wie die Blatternimpfung, die antiseptische Wundbehandlung, die Sterilisierung der Kindernahrung, eines jener grofsen Geschenke, die allen gemacht und doch niemandem genommen werden, einer jener Fortschritte, die unbedingt und von allen Menschen gleichmäfsig anerkannt werden und uns den Glauben erhalten, dafs es überhaupt einen Fortschritt giebt.

Nicht so allgemein verständlich in ihrer Wichtigkeit, aber ein gleich mächtiges Schutzmittel gegen die Erblindung auf geistigem Gebiete, sind die Schätze, um welche Helmholtz

Digitized by Google

die Physiologie bereicherte. Dafs er der erste war, welcher die Geschwindigkeit der Empfindung und des Willens im Nerven mafs, daran denken wir jetzt nicht und können nur gerade die Thatsache erwähnen, obwohl sie genügte, den Ruhm eines anderen Mannes auszumachen. Sein Hauptwerk auf diesem Gebiete, das Werk seiner letzten Mannesjahre, ist der Ausbau der Physiologie der Sinne, vor allem des Gesichtes und des Gehöres. In unserem Bewufstsein finden wir eine innere geistige Welt von Anschauungen und Begriffen, aufserhalb unseres Bewufstseins liegt fremd und kalt die Welt der wirklichen Dinge. Zwischen beiden zieht sich als schmaler Grenzstreif das Gebiet der sinnlichen Empfindung hin. Kein Verkehr zwischen beiden Welten ist möglich, als über diesen Grenzstreifen hinüber; keine Änderung in der Aufsenwelt kann sich uns bemerklich machen, als indem sie auf ein Sinnesorgan wirkt und Kleid und Farbe dieses Sinnes erborgt, keine Ursachen unserer wechselnden Gefühle können wir uns in der äufseren Welt vorstellen, als nachdem wir denselben, wenn auch noch so ungern, sinnliche Attribute beigelegt haben. Von höchster Wichtigkeit für jede Erkenntnis der Welt und unser selbst ist es also, dafs uns jener Grenzstreifen gründlich bekannt sei, damit wir nicht das, was ihm angehört, für das Eigentum der einen oder der anderen der durch ihn geschiedenen Welten halten. Als Helmholtz das Gebiet betrat, fand er es nicht geradezu unbebaut, aber doch schlecht begrenzt nach beiden Seiten, überwuchert vom Irrtum, die reichsten Gefilde noch brach liegend. Er verläfst es gut begrenzt, wohl abgeteilt, teilweise in einen blühenden Garten verwandelt.

Hochberühmt und auch in weiteren Kreisen gekannt ist seine Lehre von den Tonempfindungen. Was aufserhalb unser eine Luftbewegung ist, wird in unserer Seele ein erfreuender Akkord. Den Physiker beschäftigt nur die Luftbewegung, den Musiker, den Psychologen nur der Akkord. Aber hier wird der Übergang beider erforscht in der Empfindung, welche den bestimmten physikalischen Vorgang mit dem bestimmten seelischen Vorgang verbindet. Was entspricht aufser uns dem musikalischen Tone, dem Klange der Instrumente, des menschlichen Gesanges, den Lauten der Sprache? Was der Konsonanz und der Diskonsonanz? Woher rührt der ästhetische

Digitized by Google

Gegensatz beider? Welche innere Gesetzmäfsigkeit entwickelte die Tonleitern, die Regeln der Musik? Nicht alle Fragen, welche die Wifsbegierde stellt, lassen sich beantworten, aber fast alle Fragen, welche HELMHOLTZ vor dreifsig Jahren offen lassen mufste, sind auch jetzt noch offen geblieben. In Hinsicht des Gesichtes finden sich die gleichen Fragen behandelt in der „physiologischen Optik". Wie ist es möglich, dafs sich durch Vermittelung unserer Augen Schwingungen des Äthers umsetzen können in rein geistige Vorgänge, welche scheinbar mit jenen nichts gemein haben können und deren Beziehungen dennoch die Beziehungen der äufseren Dinge aufs genaueste wiederspiegeln? Welche Rolle spielt bei der Bildung der geistigen Vorstellungen das Auge selbst, die Gestalt der Bilder, welche es entwirft, die Art seiner Farbenempfindung, die Akkommodation, die Augenbewegung, der Umstand, dafs wir zwei Augen haben? Genügt die Mannigfaltigkeit dieser Beziehungen, um alle denkmöglichen Mannigfaltigkeiten der Aufsenwelt abzubilden, alle Mannigfaltigkeiten der inneren Welt zu rechtfertigen?

Man begreift, wie eng diese Untersuchungen verknüpft sind mit den Fragen nach der Möglichkeit und dem Rechte aller Naturerkenntnis. Himmel und Erde sind gewifs da auch ohne uns, aber für uns sind sie doch nur da, insofern wir sie wahrnehmen; ein Teil dessen, was wir wahrnehmen, gehört also uns selber an, ein Teil nur ist begründet in den Eigenschaften des Himmels und der Erde. Wo aber liegt die Grenze? Die physiologischen Untersuchungen HELMHOLTZ' bilden die notwendige Vorbedingung für die Beantwortung dieser Fragen, einen festen Stützpunkt, an welchen Hebel angesetzt werden können. Er selbst ist in einer Reihe philosophischer Aufsätze mit Liebe auf diese Fragen eingegangen, und ein kompetenterer Richter könnte sich nicht über dieselben äufsern. Werden seine Ansichten der Philosophie als ein Besitztum für alle Zeiten gelten? Wir dürfen nicht vergessen, dafs wir die Grenzen der exakten Wissenschaft schon überschritten haben; der Appell an die Natur fehlt, und Meinung steht der Meinung, Ansicht der Ansicht gegenüber.

Wurde HELMHOLTZ auf der einen Seite durch das Studium der Sinne zu den Quellen der Erkenntnis geführt, so trug ihn nach der anderen Seite das gleiche Studium zu den blühenden

Digitized by Google

Gestaden der Kunst. Zum erstenmale wurden nun Regeln, welche der Maler, der Musiker instinktiv zu beobachten gewohnt war, als notwendige Folgen unserer Organisation erkannt und durch die Erkenntnis ihrer Notwendigkeit in bewufste Gesetze künstlerischen Schaffens verwandelt.

Grofs und mannigfaltig und farbenbunt, wie alle diese Entdeckungen auch sind, am unverlöschbarsten dürfte dennoch Helmholtz' Name mit einer Entdeckung verbunden sein, welche einem abstrakteren Gebiete angehört, dem der Physik. Hier tritt der beobachtende Mensch in den Hintergrund mit seinen Empfindungen; Licht und Farbe erblassen, der Klang wird leiser, geometrische Anschauungen und allgemeine Begriffe treten an ihre Stelle, der Raum, die Zeit, die Bewegung, die Materie. Zwischen diesen Begriffen gilt es Beziehungen zu finden, welche den Beziehungen zwischen den Dingen entsprechen. Der Mafsstab für den Wert dieser Beziehungen ist ihre Allgemeinheit. Beziehungen allgemeinster Art sind zum Beispiele: die Unveränderlichkeit der Menge der Materie mit der Zeit, die Trägheit aller Materie, die Anziehung aller Materie unter sich. Die allgemeinste Beziehung, welche dies Jahrhundert neu entdeckte, wurde zuerst von Helmholtz klar erkannt. Es ist der Satz, welchen er als das Prinzip von der Erhaltung der Kraft, welchen man jetzt lieber als das von der Erhaltung der Energie bezeichnet. Lange vorher hatte man schon geahnt, dafs in der unendlichen Flucht der Erscheinungen aufser der Materie selbst noch etwas anderes beharre, nicht erschaffen noch zerstört werde, etwas Immaterielles, schwer Faſsbares. Bald schien es die Menge der Bewegung, so oder so gemessen, bald mehr die Kraft zu sein, bald ein Ausdruck aus beiden zusammengesetzt.

An Stelle dieser unklaren Vermutungen stellte Helmholtz deutliche Begriffe und feste Verhältnisse, welche sogleich eine Fülle allgemeiner und besonderer Zusammenhänge ergaben. Grofsartig waren die Ausblicke, welche das Prinzip in die Vergangenheit und in die Zukunft unseres Planetensystems eröffnete, zahllos seine Anwendungen in jeder, selbst der engsten Einzeluntersuchung. Das Prinzip ist seit vierzig Jahren so viel erläutert und gerühmt worden, dafs es jedem Gebildeten nicht völlig unbekannt ist. Man hat bemerkt, dafs ungefähr um die gleiche Zeit auch andere Köpfe anfingen, klarer über diese Dinge

Digitized by Google

zu denken, und dafs, so weit es die Erscheinungen der Wärme anlangt, andere Männer ohne HELMHOLTZ' Wissen ihm einige Jahre zuvorgekommen waren. Es wäre am wenigsten nach seinem Sinne, wenn der Ruhm dieser Männer verkleinert würde; man darf aber nicht vergessen, dafs sich die Untersuchungen derselben doch fast allein auf die Natur der Wärme bezogen, dafs aber der Sinn und der Wert des allgemeinen Prinzipes gerade darin liegt, dafs es sich nicht auf diese oder jene besondere Naturkraft beschränkt, sondern alle umfafst und selbst unter unbekannten Kräften als Leitstern dienen kann.

Nicht allgemein bekannt ist wohl, dafs HELMHOLTZ im Alter die Arbeit des Jünglings wieder aufgenommen und fortgesetzt hat. Das Gesetz von der Erhaltung der Energie, so allgemein es ist, scheint doch nur die Hälfte eines umfassenderen Gesetzes zu sein. Ein geworfener Stein würde im leeren Raume seine Geschwindigkeit beibehalten und dadurch seine Energie bewahren; dem entspricht es, wenn auch jedes noch so komplizierte System seine Energie bewahrt. Aber der Stein würde auch seine Richtung zu bewahren suchen und eine gerade Linie verfolgen; auch diesem Verhalten entspricht ein allgemeines Verhalten bewegter Systeme. Für rein mechanische Systeme weifs man seit lange, dafs dieselben, je nach den Nebenbedingungen, auf dem kürzesten Wege in der kürzesten Zeit, mit der geringsten Anstrengung zum Ziele gelangen. Man hat in dieser Erscheinung gern das Ergebnis einer absichtlichen Weisheit gesehen, ihre allgemeine Behauptung im Gebiete der reinen Mechanik hat man das Prinzip der kleinsten Wirkung genannt. Die Erscheinung zu verfolgen durch das Reich aller Kräfte, durch die ganze Natur, ist die Aufgabe, welcher HELMHOLTZ einen Teil des letzten Jahrzehntes gewidmet hat. Die Bedeutung dieser Arbeiten ist wohl noch nicht voll verstanden; ein so grofser Forscher schreitet sehr einsam voran, es dauert Jahre, ehe nur der erste Nachfolger seinen Spuren zu folgen vermag.

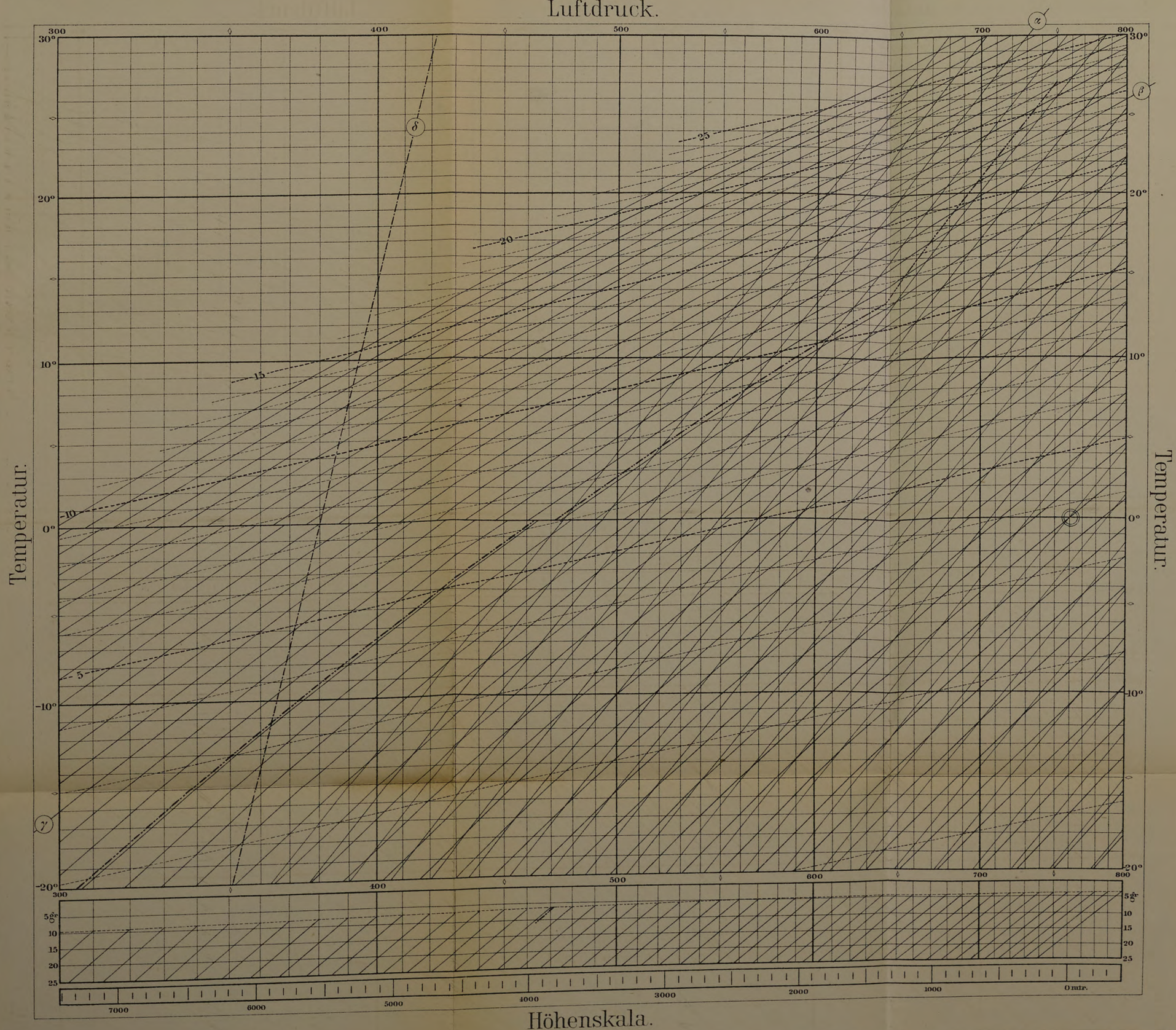
Es erschiene aussichtslos, auf sämtliche Arbeiten HELMHOLTZ' im einzelnen eingehen zu wollen. Was noch zurück ist, würde ausreichen, mehrere Gelehrte reichlich und rühmlich auszustatten. Hätte ein solcher nichts geliefert, als die elektrischen Untersuchungen HELMHOLTZ', so würde er schon als einer unserer ersten Elektriker gelten; hätte ein anderer nichts gefunden, als

Digitized by Google

die Gesetze der Wirbelbewegung der Flüssigkeiten, so dürfte er sich einer der schönsten Entdeckungen der Mechanik rühmen; wäre einem dritten nichts geglückt als die Spekulationen über die denknotwendigen und die wirklichen Eigenschaften des Raumes, so würde niemand demselben die Gabe tiefsinniger mathematischer Versenkung absprechen. Wir freuen uns, diese Erfindungen nicht zersplittert, sondern in einem Manne vereinigt zu finden. Der Gedanke, dafs der eine oder der andere Erfolg einem zufälligen Funde zu vergleichen sei, wird durch ihr Zusammentreffen unmöglich; mit Bewunderung sehen wir uns geistigen Kräften gegenüber, welche den unserigen weit überlegen sind.

Und doch wie wenig erschöpft die Summe der greifbaren Leistungen die Summe der ganzen Persönlichkeit! Wie viel von deren geistiger Arbeit tritt einzig in der Anregung zu Tage, welche erst die Altersgenossen, später die Schüler empfingen, die von nah und fern herbeiströmten. Helmholtz besafs zwar nicht eigentlich den Ruf eines glänzenden Universitätslehrers, soweit es sich um die Überlieferung der elementaren Thatsachen an die Anfänger handelt, welche die Kollegien zu füllen pflegen. Aber anders lautete das Urteil, wenn von seinem Einflusse auf Fortgeschrittene die Rede war, wenn man an die Anleitung zu selbständiger Forschung dachte. Diese kann mit Nutzen nur gelehrt werden von dem, der selber Meister in ihr ist, und nur in dem Mafse, in welchem er Meister ist. Das blofse Beispiel und Vorbild wirkt da mehr als Worte, einige hingeworfene Gedanken zeigen besser den Weg als wohlgeordnete Vorlesungen; allein schon die Gegenwart des bewunderten Lehrers berichtigt den Mafsstab, den der Schüler an seine eigenen Leistungen und die seiner Kameraden legt, und ermöglicht ihm, die Dinge nicht im Lichte des Augenblickes und des eigenen engen Gesichtskreises, sondern, wie man sagt, sub specie aeterni zu erkennen. In diesem Sinne fühlt jeder, der das Glück hatte, noch so kurze Zeit unter Helmholtz' Leitung zu arbeiten, sich vor allem als seinen Schüler, sich zugleich mit Dankbarkeit der Nachsicht, der Geduld, des Wohlwollens erinnernd, denen er begegnete. So viel solcher Schüler auch über den Erdkreis gestreut sind, keiner derselben möchte sein, der nicht heute aufser mit Bewunderung auch mit Liebe seines Meisters gedächte und demselben noch viele glückliche Jahre nutzbringender Arbeit und erfrischender Mufse wünschte.

Digitized by Google



Lith. Anst. v. C. Fürst, Leipzig.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google